

卫生部“十一五”规划教材

全国高等医药教材建设研究会规划教材

全国高等学校教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医用高等数学

第5版

主　编　张选群



人民卫生出版社

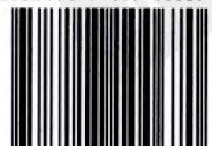
全国高等学校教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

策划编辑…窦天舒　张　科
责任编辑…高　博
封面设计…郭　淼
版式设计…郭　淼　魏红波



ISBN 978-7-117-10067-0



定价(含光盘)：25.00元

卫生部"十一五"规划教材
全国高等医药教材建设研究会规划教材

全国高等学校教材
供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医用高等数学

第5版

主　编　张选群

编　者（以姓氏笔画为序）
马建忠（中国医科大学）
王　颖（吉林大学）
刘春扬（福建医科大学）
何穗智（中山大学）
李　海（四川大学）
张福良（大连医科大学）
张喜红（长治医学院）
张选群（武汉大学）



人民卫生出版社

图书在版编目（CIP）数据

医用高等数学/张选群主编．—5 版．—北京：人民卫生出版社，2008．6

ISBN 978-7-117-10067-0

Ⅰ．医… Ⅱ．张… Ⅲ．医用数学-医学院校-教材 Ⅳ．R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 042009 号

医用高等数学
第 5 版

主　　编：张选群
出版发行：人民卫生出版社（中继线 010-67616688）
地　　址：北京市丰台区方庄芳群园 3 区 3 号楼
邮　　编：100078
网　　址：http：//www. pmph. com
E - mail：pmph @ pmph. com
购书热线：010-67605754　010-65264830
印　　刷：尚艺印装有限公司
经　　销：新华书店
开　　本：787 × 1092　1/16　　印张：14. 25
字　　数：379 千字
版　　次：1987 年 6 月第 1 版　2008 年 6 月第 5 版第 29 次印刷
标准书号：ISBN 978-7-117-10067-0/R · 10068
定价（含光盘）：25.00 元



全国高等学校五年制临床医学专业
第七轮 规划教材修订说明

全国高等学校五年制临床医学专业卫生部规划教材从第一轮编写出版至今已有30年的历史。几十年来，在卫生部的领导和支持下，以裘法祖院士为代表的一大批有丰富临床和教学经验、有高度责任感的老教授和医学教育家参与了本套教材的创建和每一轮的修订工作，使我国的五年制临床医学教材不断丰富、完善与更新，形成了一套课程门类齐全、学科系统优化、内容衔接合理的规划教材。本套教材为推动我国医学教育事业的改革和发展做出了历史性巨大贡献。正如老一辈医学教育家亲切地称这套教材是中国医学教育的“干细胞”教材，由她衍生出了八年制和研究生两套规划教材。今天，全国一大批在临床教学、科研、医疗第一线的中青年教授、学者继承和发扬了老一辈的优良传统，积极参与了本套第七轮教材的修订和建设工作，并借鉴国内外医学教育教学的经验和成果，不断完善和提升编写的水平和质量，已逐渐将每一部教材打造成了精品，使第七轮教材更加成熟、完善和新颖。

第七轮教材的修订从2006年5月开始，其修订和编写特点如下：

- 在全国广泛、深入调研基础上，总结和汲取了前六轮教材的编写经验和成果，尤其是对一些不足之处进行了大量的修改和完善，并在充分体现科学性、权威性的基础上，更考虑其全国范围的代表性和适用性。
- 依然坚持教材编写“三基、五性、三特定”的原则。
- 内容的深度和广度严格控制在五年制教学要求的范畴，精练文字压缩字数，以更适合广大五年制院校的要求，减轻学生的负担。
- 在尽可能不增加学生负担的前提下，提高印刷装帧质量，根据学科需要，部分教材改为双色印刷、彩色印刷，以提升教材的质量和可读性。
- 适应教学改革的需求，实现教材的系列化、立体化建设，本轮大部分教材配有《学习指导与习题集》、《实验指导》、《教师用书》以及配套光盘等，且与教材同期出版。

第七轮教材共52种，新增1种，即《急诊医学》。全套教材均为卫生部“十一五”规划教材，绝大部分为普通高等教育“十一五”国家级规划教材，分两批于2008年出版发行。

第七轮 教材目录

1. 医用高等数学／第5版　主编　张选群
2. 医学物理学／第7版　主编　胡新珉
3. 基础化学／第7版　主编　魏祖期
4. 有机化学／第7版　主编　吕以仙
5. 医学生物学／第7版　主编　傅松滨
6. 系统解剖学／第7版　主编　柏树令
7. 局部解剖学／第7版　主编　彭裕文
8. 组织学与胚胎学／第7版　主编　邹仲之　李继承
9. 生物化学／第7版　主编　查锡良
10. 生理学／第7版　主编　朱大年
11. 医学微生物学／第7版　主编　李　凡　刘晶星
12. 人体寄生虫学／第7版　主编　李雍龙
13. 医学免疫学／第5版　主编　金伯泉
14. 病理学／第7版　主编　李玉林
15. 病理生理学／第7版　主编　金惠铭　王建枝
16. 药理学／第7版　主编　杨宝峰
17. 医学心理学／第5版　主编　姚树桥　孙学礼
18. 法医学／第5版　主编　王保捷
19. 诊断学／第7版　主编　陈文彬　潘祥林
20. 医学影像学／第6版　主编　吴恩惠　冯敢生
21. 内科学／第7版　主编　陆再英　钟南山
22. 外科学／第7版　主编　吴在德　吴肇汉
23. 妇产科学／第7版　主编　乐　杰
24. 儿科学／第7版　主编　沈晓明　王卫平
25. 神经病学／第6版　主编　贾建平
26. 精神病学／第6版　主编　郝　伟
27. 传染病学／第7版　主编　杨绍基　任　红
28. 眼科学／第7版　主编　赵堪兴　杨培增
29. 耳鼻咽喉-头颈外科学／第7版　主编　田勇泉
30. 口腔科学／第7版　主编　张志愿
31. 皮肤性病学／第7版　主编　张学军
32. 核医学／第7版　主编　李少林　王荣福
33. 流行病学／第7版　主编　王建华
34. 卫生学／第7版　主编　仲来福
35. 预防医学／第5版　主编　傅　华
36. 中医学／第7版　主编　李家邦
37. 计算机应用基础／第4版　主编　邹赛德
38. 体育／第4版　主编　裴海泓
39. 医学细胞生物学／第4版　主编　陈誉华
40. 医学分子生物学／第3版　主编　药立波
41. 医学遗传学／第5版　主编　左　伋
42. 临床药理学／第4版　主编　李　俊
43. 医学统计学／第5版　主编　马斌荣
44. 医学伦理学／第3版　主编　丘祥兴　孙福川
45. 临床流行病学／第3版　主编　王家良　王滨有
46. 康复医学／第4版　主编　南登崑
47. 医学文献检索／第3版　主编　郭继军
48. 卫生法／第3版　主编　赵同刚
49. 医学导论／第3版　主编　文历阳
50. 全科医学概论／第3版　主编　杨秉辉
51. 麻醉学／第2版　主编　曾因明
52. 急诊医学　主编　沈　洪

第 5 版前言

《医用高等数学》是人民卫生出版社推出的具备医学专业特色的数学教材。经过专门的问卷调查，人民卫生出版社出版的《医用高等数学》目前在基础、临床、预防、口腔医学与药学类专业使用最广泛，是全国医学基础教育最受教师与学生欢迎的高等数学教材。对此，编写组谨向支持、使用本教材的师生表示感谢。历经第 1、2、3、4 版，人民卫生出版社出版的第 5 版《医用高等数学》密切配合我国医学教育改革与发展，继续保留第 4 版在先进性、科学性特别是对我国医学教育的适用性等方面的优势外，在概率论基础部分增加了一些崭新而又浅显易懂的医学应用实例和系统的理论阐述，这对医学生进一步学习卫生统计课程是有很大帮助的。

第 5 版《医用高等数学》的第一、二、三、四、五、六、七章分别由刘春扬、王颖、何穗智、张福良、张喜红、李海、马建忠修订，最后由我整合全书。本教材主要内容按 54 教学时数拟订，加上打 * 号的部分内容，总的教学时数为 72 学时。教材中，第一章第一节函数、第四章第一节的空间解析几何简介是中学数学教学与高等数学教学之间的衔接部分，很多学生在高中阶段已经学习过，教师可以根据学生情况简略。

配合第 5 版《医用高等数学》的出版，我们编写组还精编了《医用高等数学学习指导》第 2 版。《医用高等数学学习指导》第 2 版比上版更加精练，更具有针对性，是一本很好的学习高等数学的工具书。另外，我们还配备了教学多媒体光盘，不仅便利于教师授课，还可以提高学生的学习兴趣，增强学生对高等数学难点的理解能力。

我真诚地欢迎使用本教材的师生们多提宝贵意见，对教材最权威的评价在于广大的教师与学生！

张选群

2008. 2. 28

目 录



第一章　函数和极限

函数是变量之间相互联系、相互制约关系的抽象表示，是事物运动、变化及相互影响的复杂关系在数量方面的反映；极限刻画了变量的变化趋势，是研究函数的重要方法．本章内容主要包括函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的主要性质．

第一节　函　数

一、函数的概念

1．常量与变量

我们经常会遇到各种不同的量，如长度、重量、面积、温度、时间、距离等．其中有的量在过程中始终保持同一数值，称为**常量**(**constant**)；有的量在过程中可取不同的数值，称为**变量**(**variable**)．

一个量究竟是常量还是变量，不是绝对的，要根据具体过程和具体条件来确定．即使同一个量，在某一过程或条件下可以认为是常量；而在另一过程或条件下就可能是变量．例如人的身高，在研究少儿发育成长的过程中是变量，而在研究成人的健康状况时通常是常量．

常量也可看作是一种特殊的变量，即在某一过程中，该变量都取相同的数值．

2．函数的概念

定义 1-1　设 x、y 是同一变化过程中的两个变量，如果对于变量 x 的每一个允许的取值，变量 y 按照一定的规律总有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**(**function**)．此时，变量 x 称为**自变量**(**independent variable**)，y 又称为**因变量**(**dependent variable**)，记为

$$y=f(x)$$

自变量的所有允许值的集合称为函数的**定义域**(**domain of definition**)．函数的定义域通常用区间来表示．如果 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域中的一点，我们也说函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义，与 x_0 对应的因变量的值称为函数值，记为 $f(x_0)$，有时也记为"$y\big|_{x=x_0}$"，即 $y\big|_{x=x_0}=f(x_0)$．所有函数值的集合称为函数 $f(x)$ 的**值域**(**domain of functional value**)．

对应规律和定义域是函数概念中的两大要素，两个函数只有当它们的对应规律和定义域都完全相同时，才认为是两个相同的函数．函数的定义中，对应规律是用记号 $f(\ )$ 表示的，它具有广泛的含义，其表达方式通常有公式法、图像法和表格法；函数的定义域在实际中是由问题的实际意义确定的，在不考虑函数的实际意义时，是使函数的解析表达式有意义的一切实数所构成的数集．

例 1-1　在出生后 1～6 个月期间内，正常婴儿的体重近似满足以下关系式：

$$y=3+0.6x$$

式中，x 表示婴儿的月龄，是自变量；y 表示其体重(千克)，是 x 的函数．函数的定义域为 $[1,6]$．这是公式法表达的函数关系．若不考虑该问题的实际意义，函数 $f(x)=3+0.6x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$．

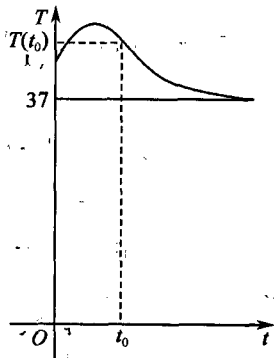


图 1-1

例 1-2　监护仪自动记录了某患者一段时间内体温 T 的变化曲线，如图 1-1 所示．对于这段时间的任意时刻 t 都能读出患者

体温 T 的值，即患者体温 T 是时间 t 的一个函数 $T=T(t)$. 这是用图像法表达的函数关系. 如果记录的是静卧在床上健康人的体温 $T=37℃$，它仍然是 t 的函数，此时无论 t 取何值，T 的取值总是 37℃，反映在图像上则是平行于 t 轴的直线.

例 1-3 某地区统计了某年 1 ~ 12 月中当地流行性出血热的发病率，见表 1-1. 可以看出，对每一个月份 t，都有一个发病率 y 与之对应. y 是 t 的函数，其定义域为 1 ~ 12 月，对应规律则由表 1-1 所示，这是用表格法表达的函数关系.

表 1-1

t(月份)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y(‰)	16.6	8.3	7.1	6.5	7.0	10.0	2.5	3.5	5.7	10.0	17.1	7.0

二、初等函数

1. 基本初等函数

中学里所学过的五类函数：

幂函数 $y=x^a$（a 为任意实数），

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$，

对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$，

三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$ 等，

反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\operatorname{arccot} x$ 等，

再加上常数函数 $y=C$（C 为常数），统称为**基本初等函数**(**basic elementary function**).

2. 复合函数

定义 1-2 设变量 y 是变量 u 的函数，变量 u 又是变量的 x 函数，即

$$y=f(u),\quad u=\varphi(x).$$

如果变量 x 的某些值通过变量 u 可以确定变量 y 的值，则称 y 是 x 的**复合函数**(**compound function**)，记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

变量 u 称为中间变量. 复合函数概念可以推广到多个函数构成情况，此时函数是通过多个中间变量的传递而形成的.

例 1-4 试通过 $y=\lg u$，$u=\arctan v$，$v=x+1$，求出 y 关于 x 的复合函数.

解 $y=\lg u$，$u=\arctan v$，$v=x+1$，则 y 关于 x 的复合函数是 $y=\lg\arctan(x+1)$，其定义域为 $(-1,+\infty)$.

例 1-5 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=\frac{x}{1-x}$，试求：$f[g(x)]$、$f[f(x)]$、$g[f(x)]$、$g[g(x)]$.

解 $f[g(x)]=\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$，　　$f[f(x)]=(x^2)^2=x^4$，

$$g[f(x)]=\frac{x^2}{1-x^2},\qquad g[g(x)]=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}.$$

如果由两个函数复合而成的函数的定义域为空集，则此复合函数无意义（或称它们不能复合）. 例如，由 $y=\arcsin u$，$u=2+x^2$，复合而成的函数 $y=\arcsin(2+x^2)$ 因 $2+x^2>1$，其定义域为空集，即函数 $\arcsin(2+x^2)$ 无意义.

以上是将多个函数“合成”为一个表达式. 而在后面的很多计算问题中，往往需要把复合函数的中间变量找出来，把它“分解”为若干个基本初等函数或由它们通过四则运算而得到的简单函数形式，以便于利用公式进行计算.



例 1-6 将下列复合函数"分解"为简单函数：

(1) $y=a\sin(bx+c)$.

(2) $y=\frac{a}{1+2^{kx}}$.

(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+\cos^2 x})$.

解 (1) $y=a\sin(bx+c)$ 可以看成是由 $y=a\sin u$ 和 $u=bx+c$ 复合而成的.

(2) $y=\frac{a}{1+2^{kx}}$ 可以看成是由 $y=\frac{a}{u}$，$u=1+2^v$，$v=kx$ 复合而成的.

(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+\cos^2 x})$ 可以看成是由 $y=\lg u$，$u=1+\sqrt{v}$　$v=1+w^2$　$w=\cos x$ 复合而成的.

3. 初等函数

定义 1-3 由基本初等函数经过有限次四则运算以及函数复合所得到的仅用一个解析式表达的函数，称为**初等函数**(**elementary function**).

例如，$y=\frac{\lg x}{\sqrt{1-x^2}}$、$y=x\tan x+\sin(1-e^x)$ 等都是初等函数.

三、分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的解析式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为**分段函数**(**piecewise function**). 分段函数在实际医学问题中也是常见的.

例 1-7 设某药物的每天剂量为 y(单位:mg)，对于16岁以上的成年人用药剂量是一常数，设为2mg. 而对于16岁以下的未成年人，则每天的用药剂量 y 正比于年龄 x，比例常数为0.125mg/岁，其函数关系(图1-2)为

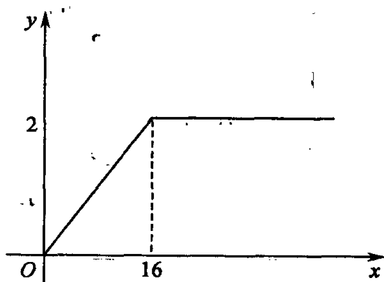


图 1-2

$$y=\begin{cases}0.125x, & 0<x<16;\\ 2, & x\geqslant 16.\end{cases}$$

这里，用药剂量 y 是年龄 x 的函数，但其函数关系是用两个解析式表示的.

应该注意的是，分段函数是一个函数，而不是两个或几个函数. 求分段函数的函数值时，不同范围内的自变量的值要代入相应范围内的函数表达式进行运算. 分段函数一般不属于初等函数. 不过，在不同段内的表达式，通常由初等函数表示.

例 1-8 设 $f(x)=\max\{|x|,x^2\}=\begin{cases}x^2, & x<-1;\\ -x, & -1\leqslant x<0;\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x^2, & 1<x.\end{cases}$

求 $f(-2)$、$f(-0.5)$、$f(0)$、$f(1.2)$.

解 $f(-2)=(-2)^2=4$,

$f(-0.5)=-(-0.5)=0.5$,

$f(0.5)=0.5$,

$f(1.2)=1.2^2=1.44$.

四、函数的几种简单特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使对所有的 $x\in(a,b)$，恒

有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在(a,b)内是有界的；如果不存在这样的正数M，则称$f(x)$在(a,b)内是无界的.

例如：$\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的；$y=\frac{1}{x}$在$(1,+\infty)$内是有界的，但在$(0,1)$内是无界的.

2. 单调性

设x_1、x_2是函数$f(x)$的定义区间(a,b)内的任意两点，且$x_1<x_2$. 若$f(x_1)<f(x_2)$，则称$f(x)$在(a,b)内是单调递增的；若$f(x_1)>f(x_2)$，则称$f(x)$在(a,b)内是单调递减的.

例如：2^x在$(-\infty,+\infty)$内是单调递增的；x^2在$(-\infty,0)$内是单调递减的，而在$(0,+\infty)$内是单调递增的.

3. 奇偶性

如果对于函数$f(x)$定义域内的任意点x，恒有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$是偶函数；如果对于函数$f(x)$定义域内的任意点x，恒有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数. 偶函数的图像是关于y轴对称的，而奇函数的图像是关于坐标原点对称的.

例如：x^2-3x^4、2^x+2^{-x}、$\cos x$都是偶函数；$\sin x$、$x+2x^3$、2^x-2^{-x}都是奇函数.

4. 周期性

对于函数$f(x)$，如果存在正的常数T，使得$f(x)=f(x+T)$恒成立，则称$f(x)$为周期函数，满足这个等式的最小正数T，称为函数的周期.

例如：$\sin x$、$\cos x$都是周期函数，周期为2π.

【思考与练习】

1. 判断下列各组中的函数是否为相同的函数：

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}$与$g(x)=x$；　(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^3}$与$g(x)=x$；

(3) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$与$g(x)=\frac{1}{x+1}$；　(4) $f(x)=10^{\lg x}$与$g(x)=x$；

(5) $f(x)=\cos^2x+\sin^2x$与$g(x)=1$；　(6) $f(x)=\arcsin x$与$g(x)=\frac{\pi}{2}-\arccos x$；

(7) $y=\tan(x+1)$与$u=\tan(v+1)$.

2. 设$f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，考察下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)g(x)$；　(2) $f[g(x)]$；　(3) $f[f(x)]$.

3. 下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x)=x^3+|\sin x|$；　(2) $f(x)=(2^x+2^{-x})\cos x$；　(3) $f(x)=\arctan(\sin x)$.

4. 指出下列各函数中哪些是周期函数，并指出其周期.

(1) $y=\arctan(\tan x)$；　(2) $y=\sin\pi x+\cos\pi x$；　(3) $y=\sin\frac{1}{x}$；　(4) $y=1+\cos 2x$.

第二节　极　　限

一、极限的概念

在研究实际问题时，除了了解有关函数在变化过程中如何取值之外，往往我们还需要



弄清楚：当自变量按一定的趋势变化时，函数的变化趋势如何. 这就是**极限(limit)**概念所要描述和解答的问题.

对于函数 $y=f(x)$，自变量 x 的变化趋势有两种情形：一种是自变量 x 的绝对值无限增大(记为 $x\to\infty$)；另一种是自变量的值无限趋近于某一定值 x_0(记为 $x\to x_0$). 下面我们分别考察这两种情况下函数 $y=f(x)$ 的变化趋势.

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时的变化趋势. 由表 1-2 可看出，无论 x 是取正值并无限增大(记作 $x\to+\infty$)，还是取负值且其绝对值无限增大(记作 $x\to-\infty$)，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势都是无限趋近于 0.

表 1-2

x	±1	±10	±100	±1000	±10000	±100000	…	$\to\infty$
$f(x)$	±1	±0.1	±0.01	±0.001	±0.0001	±0.00001	…	$\to0$

从图 1-3 也可看出，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 上的图像无限地接近于 x 轴，即以直线 $y=0$ 为渐近线. 由此可见：0 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时无限接近的一个常数.

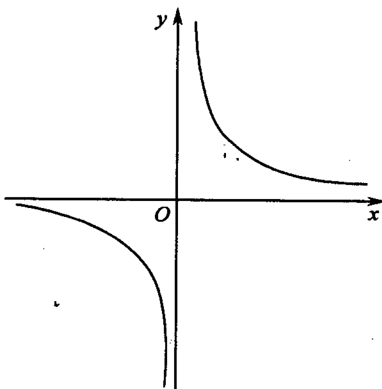


图 1-3

定义 1-4 当自变量 x 的绝对值无限增大时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，就称当 x 趋于无穷大时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限(或**收敛**于 A)，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to0$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$. 如果当 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 不趋于某一个常数，此时，我们就称 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限不存在(或称为**发散**). 例如函数 $y=\sin x$ 和 $y=x^2$，当 $x\to\infty$ 时极限都不存在. 前者在 $x\to\infty$ 时函数值始终在 -1 与 1 之间波动；后者当 $x\to\infty$ 时，函数值是无限增大的. 对于后一种情形，我们也常记为

$$\lim_{x\to+\infty}x^2=\infty \text{ 或 } x^2\to\infty\ (x\to\infty).$$

若仅当自变量 x 的变化沿 x 轴正方向无限增大(或沿 x 轴负方向绝对值无限增大)时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 的**单侧极限**，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\left(\text{或 }\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\right).$$

例如，对于函数 $f(x)=\arctan x$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to\dfrac{\pi}{2}$；当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\dfrac{\pi}{2}$，即

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，当自变量从 x 轴上 $x=1$ 的左右趋近于 1(记为 $x\to1$)时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势见表 1-3.

表1-3

x	0.5	0.7	0.9	0.99	0.999	…	→1
$f(x)$	2	1.492	1.11	1.010	1.001	…	→1
x	1.5	1.2	1.1	1.01	1.001	…	→1
$f(x)$	0.667	0.833	0.909	0.990	0.999	…	→1

由表1-3可见，当$x\to1$，不论是从右边还是从左边趋近于1，函数$f(x)$都趋近于1，可见1是当自变量$x\to1$时函数$f(x)=\frac{1}{x}$无限接近的常数.

在极限定义的过程中，邻域是常用的一个概念. 设x_0是某一定点，δ是大于零的某实数，开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为点x_0的**δ邻域**，点x_0称为邻域的中心，δ称为邻域的半径.

定义1-5 设函数$f(x)$在点x_0的某邻域内有定义(点x_0可以除外)，当自变量x以任意方式无限趋近于定点x_0时，若函数$f(x)$无限趋近于一个常数A，就称当x趋近于x_0时，函数$f(x)$以A为极限(或**收敛**于A)，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

由此，当$x\to1$时，$f(x)=\frac{1}{x}\to1$，即$\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x}=1$. 如果当$x\to x_0$时，$f(x)$不趋近一个常数，则称当$x\to x_0$时，$f(x)$的极限不存在(或称为**发散**). 例如当$x\to0$时，$\frac{1}{x}$、$\sin\frac{1}{x}$的极限都不存在. 显然，前者趋于无穷大，而后者在$-1$与1之间波动. 对于前者，我们也常记为

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty \text{ 或 } \frac{1}{x}\to\infty(x\to0).$$

在上述定义中，若自变量x趋近于定点x_0，仅限于$x<x_0$(或$x>x_0$)，即从x_0的左侧(或从x_0的右侧)趋近于x_0时，函数$f(x)$趋近于一个常数A，则A就称为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限(或右极限)，记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A$$

$$(\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A).$$

显然，当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限存在的必要充分条件是左、右极限都存在并且相等.

例1-9 讨论函数$f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\0 & x=0\\x-1 & x>0\end{cases}$ 当$x\to0$时的极限.

解 这是分段函数，$f(x)$在$x=0$处的左、右极限分别为：

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+1)=1;$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x-1)=-1.$$

由于左极限不等于右极限，所以当$x\to0$时，函数$f(x)$的极限不存在(图1-4).

若考察函数$f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\1-x & x>0\end{cases}$当$x=0$时的极限(图1-5)，由于

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+1)=1;$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(1-x)=1.$$

左右极限相等，因此$x\to0$时，$f(x)$的极限存在且$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.



3. 数列的极限

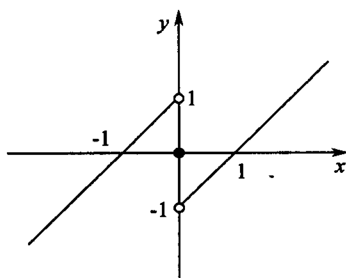


图1-4

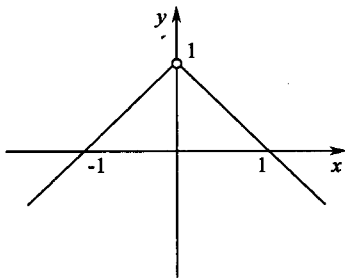


图1-5

数列(**sequence of numbers**)是按顺序依次排列的一串数：

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \cdots$$

数列中每一个数称为数列的项，其中 a_n 称为第 n 项，也称为数列的**通项**(**general term**). 数列可简记为 $\{a_n\}$. 以下给出几个数列的例子：

(1) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$: $-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots$;

(2) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \cdots$;

(3) $\{2n\}$: $2, 4, 6, 8, \cdots$;

(4) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$: $0, 1, 0, 1, \cdots$.

数列实际上就是定义在自然数集上的函数：$f(n) = a_n$. 因此，考察当 n 无限增大时数列的变化趋势，即数列的极限时，可类比函数 $f(x)$ 当自变量 $x \to +\infty$ 时的情形. 由此，数列 $\{a_n\}$ 的极限可描述为：当 n 无限增大时，若 a_n 无限趋近于一个常数 A，则称当 n 趋于无穷大时，a_n 以 A 为极限(或**收敛**于 A)，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ 或 } a_n \to A (n \to \infty).$$

例如，对于上面的 4 个数列，(1)、(2)的极限存在：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

而(3)、(4)的极限不存在. 对于(3)可记为

$$\lim_{n\to\infty} 2n = +\infty.$$

4. 判别极限存在的法则

法则 1(夹逼法则) 若在同一极限过程中，三个函数 $f_1(x)$、$f(x)$ 及 $f_2(x)$ 之间有如下关系：

$$f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$$

且

$$\lim f_1(x) = \lim f_2(x) = A,$$

则

$$\lim f(x) = A.$$

法则 2(单调有界法则) 单调有界数列一定有极限. 即对 $\{a_n\}$ 而言，若有 $a_1 \geqslant a_2 \cdots \geqslant a_n \cdots$(递减)或 $a_1 \leqslant a_2 \cdots \leqslant a_n \cdots$(递增)，且对一切 n，有 $|a_n| \leqslant M$(有界)，则 $\{a_n\}$ 必有极限.

法则 2 对函数极限也是有效的.

二、无穷小量及其性质

1. 无穷小量与无穷大量

定义 1-6 如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0\,(\text{或}\lim_{x\to\infty} f(x)=0),$$

则称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量，简称**无穷小**(**infinitesimal**).

定义 1-7 如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时 $|f(x)|$ 可无限增大，则称 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大量，简称**无穷大**(**infinity**). 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\,(\text{或}\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty).$$

注意：无论是无穷小还是无穷大，它们都是相应于某一变化过程而言的. 例如，当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 是无穷小；当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x}$ 是无穷大；而当 $x\to 1$ 时，$\frac{1}{x}$ 既不是无穷小也不是无穷大. 另外，它们都是变量，任何很小的常数(零除外)或任何很大的常数都不能称为无穷小或无穷大.

由定义容易看出，在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 是无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小；反之，若 $f(x)$ 是无穷小且 $f(x)\neq 0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

2. 无穷小定理及性质

定理 1-1 $\lim f(x)=A$ 成立的必要充分条件是 $\lim[f(x)-A]=0$.

这里的"$\lim f(x)$"是指某一变化过程. 定理 1-1 指出无穷小与函数极限之间的关系，即：若函数 $f(x)$ 以 A 为极限，则函数 $f(x)-A$ 是无穷小；反之，若 $f(x)-A$ 是无穷小，则 $f(x)$ 以 A 为极限. 因此，我们通常也可将 $\lim f(x)=A$ 表达为

$$f(x)=A+\alpha\,(\lim\alpha=0).$$

性质 1-1 有限个无穷小的代数和或乘积仍是无穷小.

即：若 $\lim\alpha_i=0\,(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\lim\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0$，$\lim\prod_{i=1}^{n}\alpha_i=0$.

性质 1-2 有界变量或常数与无穷小的乘积是无穷小.

即：若 $|f(x)|\leqslant M$，$\lim\alpha=0$，则 $\lim\alpha f(x)=0$.

例 1-10 说明当 $x\to 1$ 时，$\frac{1}{x}+2\to 3$

解 因为 $\left(\frac{1}{x}+2\right)-3=\left(\frac{1}{x}-1\right)\to 0$（当 $x\to 1$ 时），是无穷小，由定理 1-1，便有

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}+2\right)=3.$$

例 1-11 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，由无穷小与无穷大的关系可知，

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

例 1-12 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

解 因为 $|\sin x|\leqslant 1$，即 $\sin x$ 是有界变量，而当 $x\to\infty$，$\frac{1}{x}$ 是无穷小，由性质 1-2 可知：$\frac{\sin x}{x}$ 也是无穷小. 即



$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

例 1-13　证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

证　因为对任何实数 x，有　$0\leqslant|\sin x|\leqslant|x|$，

$$0\leqslant|\cos x-1|=\left|2\sin^2\frac{x}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{x}{2}\right|^2=\frac{x^2}{2}.$$

而 x 是无穷小，由夹逼法则及定理 1-1、性质 1-1、性质 1-2 可知：

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0,\ \lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

3. 无穷小的比较与阶

在同一个变化过程中的两个无穷小，虽然都趋于零，但它们趋于零的快慢程度却可能有所不同. 比较两个无穷小这种差异的方法，是看这两个无穷小的比值在这一极限过程中的变化趋势如何. 例如，当 $x\to 0$ 时，

$$\frac{x^2}{x}、\frac{2x}{x}、\frac{x}{x^2}、\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$$

都是两个无穷小之比，它们的极限分别是：0、2、∞、不存在(但有界).

为此，我们对无穷小比值的情况作如下定义，并用无穷小的阶来表达其趋于零的快慢程度.

定义 1-8　设 $\alpha=\alpha(x)$、$\beta=\beta(x)$ 是同一变化过程中的无穷小，且 $\alpha\neq 0$.

(1) 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是相对于 α 的较高阶无穷小；

(2) 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是相对于 α 的较低阶无穷小；

(3) 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小. 特别地，当 $C=1$ 时，称 β 与 α 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

此外，若 x 是一无穷小，而无穷小 $f(x)$ 与 $x^k(k>0)$ 同阶，就称 $f(x)$ 是相对于 x 的 k 阶无穷小.

三、极限的四则运算

定理 1-2　若 $\lim f(x)=A$，$\lim(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

(2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB$，

特别地　　$\lim kf(x)=k\lim f(x)$ (k 为常数)；

(3) 当 $B\neq 0$，$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$.

证　极限式(1)、(2)、(3)的证法相同，这里以(2)为例加以证明.

由定理 1-1，可设 $f(x)=A+\alpha(x)$，$g(x)=B+\beta(x)$，且 $\alpha(x)$、$\beta(x)$ 都是无穷小. 因为 $f(x)g(x)-AB=[A+\alpha(x)][B+\beta(x)]-AB=A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$

而 $A\beta(x)$、$B\alpha(x)$、$\alpha(x)\beta(x)$ 都是无穷小，其和也是无穷小，故 $f(x)g(x)-AB$ 是无穷小，所以

$$\lim[f(x)g(x)]=AB.$$

定理 1-2 中的(1)、(2)都可推广到有限多个函数时的情形. 因此，容易得到当 n 为正数时，$\lim\limits_{x\to x_0}x^n=x_0^n$. 对于更一般的情形，如果函数 x^a (a 是任意的实数)在 x_0 有定义，则

$$\lim_{x\to x_0}x^a=x_0^a$$

也成立，这可应用下一节中初等函数的连续性予以证明.

例 1-14 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

解 当 $x\to 2$ 时，分母的极限不为零，可利用商的极限法则，故有

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)}=\frac{1}{3}.$$

例 1-15 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

解 这里分母的极限 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$，故不能利用商的极限法则来对分子、分母分别求极限. 因 $x\to 1$ 而 $x\neq 1$，所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

例 1-16 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

解 当 $x\to\infty$ 时，分子、分母的极限都不存在，利用无穷大与无穷小的关系，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

例 1-17 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$.

解 因分子、分母分别的极限都为零，不能用商的极限法则，这里先将分子有理化后再来求极限.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{1+x}-2)(\sqrt{1+x}+2)}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{1+x}+2}=\frac{1}{4}.$$

例 1-18 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2}-x)$.

解 这里不能直接用乘积的极限法则，先通过有理化变形后，再求极限.

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+2}-x)(\sqrt{x^2+2}+x)}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}=1.$$

四、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

作单位圆($OA=1$)，设 $\angle AOB=x$(弧度)，过 A 作圆的切线与 OB 的延长线交于 P，过 B 作 OA 的垂线交于 C(图 1-6). 从图形可看出，$\triangle OAB$ 的面积 $<$ 扇形 OAB 的面积 $<\triangle OAP$ 的面积，再由 $OA=1$，$AP=\tan x$，

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}\tan x.$$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，上式各项同除以 $\frac{1}{2}\sin x$，得

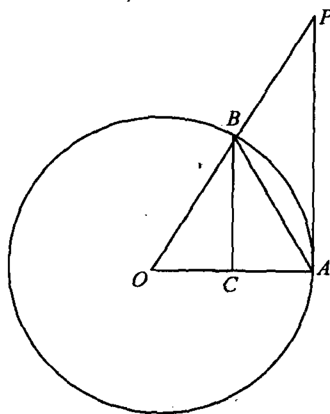


图 1-6



$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

即
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\cos x=1$ 及夹逼法则，有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

当 $x<0$ 时，$-x>0$ 时，所以

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{-x\to0^+}\frac{\sin(-x)}{-x}=1.$$

综合便可得到

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

例 1-19 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$，则当 $x\to\infty$，$t\to0$，于是

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

例 1-20 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim\limits_{x\to0}\frac{m}{n}\frac{\sin mx}{mx}\frac{nx}{\sin nx}=\frac{m}{n}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin mx}{mx}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{nx}{\sin nx}=\frac{m}{n}.$

例 1-21 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]=\frac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

这一极限可用单调有界法则证明(证明略)，e 是一个无理数，取小数点后 5 位的近似值是 $e\approx2.71828$.

例 1-22 求 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$，当 $x\to0$ 时，$t\to\infty$，

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e.$$

例 1-23 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}$.

解 令 $\frac{1}{t}=-\frac{2}{x}$，$x\to\infty$ 时，$t\to\infty$，故

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-6t}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-6}=e^{-6}.$$

例 1-24 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}=\dfrac{1}{e}.$

以 e 为底的对数称为**自然对数**(**natural lofarithm**)，今后记 $\log_e$ 为 ln，$\ln x$ 是非常重要的基本初等函数.

【思考与练习】

1. 在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 中，x 能否取 x_0？$f(x)$ 能否取值 A？
2. 无穷小量是否是 0？0 是否是无穷小量？
3. 当 $x\to0$ 时，$1-\cos x$ 是 x 的几阶无穷小？
4. 下面的计算过程对否：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}x}{\lim\limits_{x\to1}(x-1)}=\infty$
5. 无穷小可通过它们比值的极限来比较其趋于零的快慢程度，无穷大是否也可类似地比较它们趋于无穷的快慢程度呢？
6. 当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=x^3\cos x$ 是无穷大量吗？它有界吗？
7. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n-1}+x_n+x_{n+1}}{3}=$？

第三节　函数的连续性

现实世界中很多变量的变化都是连续不断的，例如气温的升降、生物的生长、血液的流动等，都是连续地变化着的，这种现象反映在数学上就是函数的连续性.

一、函数连续的概念

1. 函数的增量

自然现象中连续变动的量，用函数来描述时都有这样一个特点：当自变量的值改变非常小时，相应的函数值的改变也非常小. 例如，胎儿的体重是孕育时间的函数，在很短的时间内，胎儿体重的变化是很小的. 为此，引进函数的增量的概念.

为便于研究函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 附近的变化情况，把点 x_0 附近的点 x 记为 $x_0+\Delta x$，这时 $\Delta x=x-x_0$ 称为自变量由 x_0 变到 $x=x_0+\Delta x$ 的**增量**(**increment**)(或称改变量). 当自变量 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数值由 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$. 我们称 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的增量(或称改变量)，记为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

2. 函数连续性的定义

有了增量的概念，我们便可用自变量的增量 Δx 反映自变量在 x_0 处的改变情况，用函数的增量 Δy 反映相应函数值的改变情况(图 1-7).

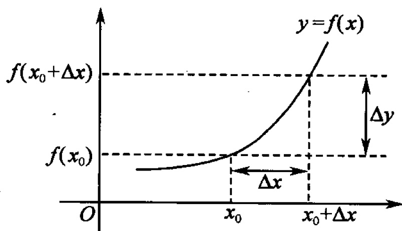


图 1-7

定义 1-9 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义，当自变量 x 在 x_0 处有一个增量 Δx 时，函数相应有一个增量 Δy

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

若

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=0 \qquad (1\text{-}1)$$



则称函数$f(x)$在点x_0处连续，x_0称为$f(x)$的**连续点**(**continuity point**).

由$\Delta x = x - x_0$，当$\Delta x \to 0$，有$x \to x_0$. 上述定义中的极限可改写为

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = 0$$

即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1-2}$$

因此，函数在x_0处连续的定义也可用这一极限式来表示. 也可以说函数$y = f(x)$在x_0处连续的必要充分条件是：①$f(x)$在x_0处有定义；②$f(x)$在x_0的极限存在；③$f(x)$在x_0的极限值等于$f(x)$在x_0的函数值.

如果函数$f(x)$在x_0处的左极限$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$处**左连续**(**continuity from the left**)；同样，$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$处**右连续**(**continuity from the right**). 显然，函数$f(x)$在x_0处连续的必要充分条件是$f(x)$在$f(x_0)$处左、右都连续，即

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0). \tag{1-3}$$

式(1-1)、(1-2)、(1-3)给出了函数$y = f(x)$在点x_0连续的三种等价的定义方式.

如果函数$f(x)$在区间(a,b)内任一点连续，则称$f(x)$是区间(a,b)内的连续函数.

如果函数$f(x)$在区间(a,b)内连续，且有$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$，$\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$，则称$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数.

连续函数图像称为**连续曲线**(**continuous curve**).

例 1-25　证明函数$y = \sin x$在其定义域内任一点处都连续.

证　设x_0是$y = \sin x$定义域内任意一点，在点x_0处有增量Δx时，对应的函数增量为

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

因

$$\left|\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1 \text{ 及 } \left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{2}\right|$$

所以

$$|\Delta y| = \left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant |\Delta x|$$

当$\Delta x \to 0$时，有$\Delta y \to 0$，所以函数$y = \sin x$在点x_0处连续. 由x_0的任意性，知函数$y = \sin x$在定义域内任一点都是连续的.

例 1-26　设$f(x) = \begin{cases} a + bx, & x \leqslant 0; \\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x > 0. \end{cases}$ $f(x)$在点$x = 0$处连续，问a、b应满足什么关系？

解　这是分段函数，在分段点$x = 0$处，有$f(0) = a$；

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-}(a + bx) = a,$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+}\frac{\sin bx}{x} = b.$$

已知$f(x)$在$x = 0$处连续. 因此必然在$x = 0$处左、右都连续，即

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(0) = a,$$

即有$a = b$.

3. 函数的间断点

函数的不连续点就是函数的**间断点**(**discontinuous point**)，即满足下列三个条件之一的点x_0就是函数$f(x)$的间断点：

(1) $f(x)$在点x_0没有定义；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在；



(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

函数的间断点通常分为两类. 设 x_0 是$f(x)$间断点，如果$f(x)$在 x_0 处的左、右极限都存在，则称 x_0 是$f(x)$的第一类间断点. 第一类间断点以外的其他间断点统称为第二类间断点.

例 1-27 函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$在点 $x=0$ 处无定义，所以函数在点 $x=0$ 处是间断点，但是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

可知属于第一类间断点. 如果定义

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases},$$

则函数$f(x)$在点 $x=0$ 处连续. 这种情况的第一类间断点称为**可去间断点**.

例 1-28 讨论函数$f(x)=\begin{cases}x+1 & x>0\\ x-1 & x\leqslant 0\end{cases}$在点 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $$\lim_{x\to 0^+}f(x)=1,\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=-1.$$

可知，$x\to 0$ 时$f(x)$的极限不存在，因而函数$f(x)$在 $x=0$ 点间断. 由于$f(x)$在 $x=0$ 处的左、右极限存在，可知属于第一类间断点. 这种左、右极限存在但不相等情况下的间断点，称为**跳跃间断点**，如图 1-8 所示.

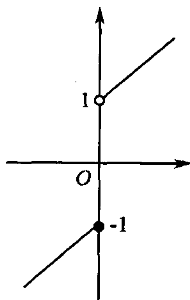


图 1-8

例 1-29 函数 $y=\dfrac{1}{x}$在点 $x=0$ 处无定义，可知点 $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$的间断点. 因

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty,$$

称 $x=0$ 为函数 $y=\dfrac{1}{x}$的无穷间断点，属于第二类间断点.

例 1-30 讨论函数$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$在点 $x=0$ 的连续性.

解 因为 $x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$在 -1 与 1 之间振荡，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在，因此$f(x)$在 $x=0$ 点间断. 这种间断点称为**振荡间断点**，属于第二类间断点.

二、初等函数的连续性

这里不加证明地给出以下几个结论：

(1) 一切基本初等函数在其有定义的点都是连续的.

(2) 若函数$f(x)$与 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则函数 $f(x)\pm g(x)$、$f(x)g(x)$ 及$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $[g(x_0)\neq 0]$在 $x=x_0$ 点连续.

(3) 若函数 $u=\varphi(x)$在点 $x=x_0$ 处连续，设 $u_0=\varphi(x_0)$，而函数 $y=f(u)$在点 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 $x=x_0$ 处连续.

由以上结论可知，初等函数在其定义区间内都是连续的.

由于函数在其连续点 x_0 满足



$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(\lim_{x\to x_0}x)=f(x_0),$$

初等函数在其有定义的点处求极限的问题就转化为求这一点的函数值.

例 1-31　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan x}{\sqrt{5-x^2}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan x}{\sqrt{5-x^2}}=\dfrac{\arctan 1}{\sqrt{5-1^2}}=\dfrac{\pi}{8}$.

例 1-32　求 $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x}}$.

解　因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，而函数 $y=e^u$ 在点 $u=1$ 连续，所以

$$\lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^1=e.$$

三、闭区间上连续函数的性质

这里介绍闭区间上连续函数的两个重要性质.

定理 1-3（最值定理）　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间必有最大值和最小值.

定理 1-4（介值定理）　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任何值 c，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=c(a<\xi<b).$$

此定理的几何意义是：连续曲线 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=c$ 至少相交于一点，如图 1-9 所示.

特别地，若 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)f(b)<0$），则连续曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴至少有一个交点，亦即方程 $f(x)=0$ 在区间 (a,b) 内至少有一个实根（图 1-10）.

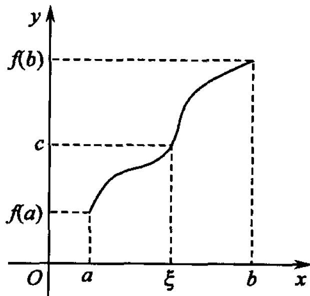


图 1-9

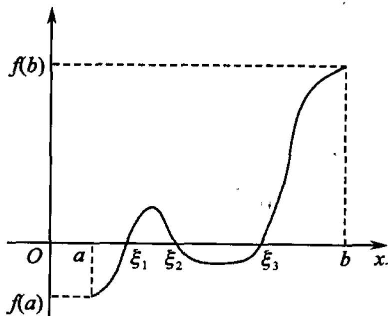


图 1-10

【思考与练习】

1. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，能断言 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在吗？
2. 分段函数是否一定有间断点？
3. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(x)$ 在点 x_0 间断，能否断定 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 必间断？若 $f(x)$、$g(x)$ 在点 x_0 都间断，能否断定 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 间断？
4. 开区间连续的函数是否必有最大、最小值？又是否必定没有最大、最小值？
5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内连续，且 $f(a)f(b)<0$，能否保证方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内必有实根？
6. 证明方程 $x=\sin x+2$ 至少有一个不超过 3 的实根.

习　题　一

1. 求下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{(x+2)(x-1)}$；　(2) $y=\arccos(x-3)$；

(3) $y=\lg\frac{x-1}{x+2}$；　(4) $y=\frac{\sqrt{\ln(2+x)}}{x(x-4)}$；

(5) $y=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right)$；　(6) $y=\frac{x}{\sin x}$.

2. 设$f(x)=\begin{cases}1+x^2 & x<0\\ \frac{1}{2} & x=0\\ -x & x>0\end{cases}$，求$f(0)$、$f\left(\frac{1}{2}\right)$、$f\left(\lg\frac{1}{2}\right)$.

3. 设函数$y=f(x)$的定义域为$[0,1]$，求下列函数的定义域

(1) $f\left(x+\frac{1}{3}\right)+f\left(x-\frac{1}{3}\right)$；　(2) $f(\sin x)$；

(3) $f(\ln x+1)$；　(4) $f(x^2)$.

4. 写出y关于x的复合函数

(1) $y=\lg u$，$u=\tan(x+1)$；　(2) $y=u^3$，$u=\sqrt{x^2+1}$；

(3) $y=u+\sin u$，$u=1-v$，$v=x^3$；　(4) $y=e^u$，$u=v^2$，$v=\sin\omega$，$\omega=\frac{1}{x}$.

5. 指出下列各函数是由哪些基本初等函数或简单函数复合而成

(1) $y=e^{\arctan(2x+1)}$；　(2) $y=\sqrt{\sin^3(x+2)}$；

(3) $y=\tan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$；　(4) $y=\cos\ln^3\sqrt{x^2+1}$.

6. 已知$f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$，求$f(x)$表达式.

7. 已知$f\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)=\tan^2x+\frac{1}{\tan^2x}+3$，$x\neq\frac{k\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，求$f(x)$的表达式.

8. 求下列数列的极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sin n}{n+1}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

9. 求下列函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-1}{x-1}$；　(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-x-1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x-1}{x^2-5x+4}$；

(5) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$；　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$；　(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$；　(10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(11) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{2}{1-x}}$；　(12) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$；



(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{1+x}\right)^{x-1}$；　　(14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\ln(1+x)}{3x-\ln(1+x)}$；

(15) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\ln(2+x)}{\sqrt[3]{1+2x}+1}$；　　(16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

10. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+bx+6}{1-x}=5$，试确定 b 的值.

11. 已知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{ax^2-x+1}\right)$存在，试确定 a 的值，并求出极限值.

12. 当 $x\to 0$ 时，将下列函数与 x 进行比较，哪些是高阶无穷小？哪些是低阶无穷小？哪些是同阶无穷小？哪些是等价无穷小？

(1) $\tan^3 x$；　　(2) $\sqrt{1+x^2}-1$；

(3) $\csc x-\cot x$；　　(4) $x+x^2\sin\frac{1}{x}$；

(5) $\cos\frac{\pi}{2}(1-x)$；　　(6) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$.

13. 已知当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+ax^2}-1$ 与$\sin^2 x$ 是等价无穷小，求 a 值.

14. 设$f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ a+\ln(1+x) & x\geq 0\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，试确定 a 的值.

15. 讨论函数$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x\sin\frac{1}{x} & x>0\end{cases}$在点 $x=0$ 处的连续性.

16. 讨论函数$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0\end{cases}$在点 $x=0$ 处的连续性.

17. 设$f(x)=\begin{cases} \frac{\ln(1+ax)}{x} & x\neq 0 \\ 2 & x=0\end{cases}$在点 $x=0$ 处连续，求 a 值.

18. 确定下列函数的间断点与连续区间

(1) $y=\frac{x}{\ln x}$；　　(2) $y=\frac{x-2}{x^2-5x+6}$；

(3) $y=\begin{cases} 1-x^2 & x\geq 0 \\ \frac{\sin|x|}{x} & x<0\end{cases}$；　　(4) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+x^n}(x\geq 0)$.

19. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)<a$，$f(b)>b$，证明：方程$f(x)=x$ 在(a,b)内至少有一实根.

20. 设函数$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)>g(a)$，$f(b)<g(b)$，证明：在(a,b)内，曲线 $y=f(x)$与 $y=g(x)$至少有一个交点.

第二章　一元函数微分学

微分学和积分学统称为微积分学，它是高等数学的核心内容．一元函数微分学最基本的概念是导数与微分．导数描述了一个函数的因变量相对于自变量变化的快慢程度，即因变量关于自变量的变化率；微分表述了函数当自变量有微小变化时，因变量增量的近似程度．本章将从两个实际例子出发，抽象出导数的概念，进而建立起计算导数、微分的方法，在此基础上，进一步讨论微分学的理论，最后介绍应用导数来研究函数的某些性态，并利用这些知识解决生物、医药学等方面的实际问题．

第一节　导数的概念

导数的概念是许多自然现象在数量关系上抽象出来的研究变化率结构的数学模型．例如，物体运动的瞬时速度、加速度，化学中的反应速度，放射性物质的蜕变速度，生物学中的出生率、死亡率、自然生长率，人口增长率，细胞增殖速度等等，都是导数问题．

一、实例

1．变速直线运动的瞬时速度

设有一质点 M 沿直线做变速直线运动，其运动规律（函数）为

$$s=s(t)$$

其中 t 是时间，s 为路程，下面讨论在时刻 t_0 的瞬时速度．

当时间由时刻 t_0 变化到 t（记 $t=t_0+\Delta t$）时，路程由 $s(t_0)$ 变化到 $s(t_0+\Delta t)$，路程的增量

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0),$$

质点 M 在时间 Δt 内，平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

当 Δt 变化时，平均速度 $\bar{v}$ 也随之变化．若质点 M 做匀速运动，平均速度 $\bar{v}$ 是一常数，且为任意时刻的速度．但在实际问题中，这种情况很难发生，质点 M 运动的速度每时每刻都是不同的，于是求“t_0”这一时刻的瞬时速度就显得尤为重要了．当 $|\Delta t|$ 较小时，平均速度 $\bar{v}$ 是质点在时刻 t_0 的“瞬时速度”的近似值．显然，当 $|\Delta t|$ 愈小，它的近似程度愈好．当 $\Delta t\to 0$ 时，若 $\bar{v}$ 趋于确定值，该值就是质点 M 在时刻 t_0 的瞬时速度 v，即

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}. \tag{2-1}$$

平均速度 $\bar{v}$ 只能反映质点在这段时间内速度的概貌，而瞬时速度 v 则反映了路程函数 $s(t)$ 相对于时间 t 变化的快慢程度，在此，称其为函数 $s(t)$ 相对于自变量 t 的变化率．

2．细菌的繁殖速度

在细菌繁殖的过程中，细菌的数量会随着时间的推移而增多，下面讨论细菌在时刻 t_0 的瞬时繁殖速度．

设细菌在某一时刻 t 的总数为 N，显然 N 是时间 t 的函数

$$N=N(t).$$



那么从 t_0 变化到 $t(t=t_0+\Delta t)$ 这段时间内，细菌的平均繁殖速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{N(t_0+\Delta t)-N(t_0)}{\Delta t}.$$

当 $|\Delta t|$ 很小时，平均繁殖速度 $\bar{v}$ 是 t_0 时刻的瞬时繁殖速度的近似值，当 $|\Delta t|$ 愈小，它的近似程度愈好. 当 $\Delta t\to 0$ 时，$\bar{v}$ 的极限值(如果存在的话)就是细菌在时刻 t_0 的瞬时繁殖速度，即

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N(t_0+\Delta t)-N(t_0)}{\Delta t}. \tag{2-2}$$

二、导数的定义及其几何意义

我们研究了变速直线运动的瞬时速度和细菌的繁殖速度问题. 尽管它们的实际背景不同，但它们处理问题的数学方法是完全一致的，(2-1)和(2-2)式的数学结构是完全相同的. 它们都是通过以下三个步骤，抽象出函数的增量与自变量的增量之比的极限(当自变量增量趋于0时)，即

(1) 当自变量在给定值 x_0 处有一增量 Δx，函数 $y=f(x)$ 相应地有一增量 Δy

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0);$$

(2) 函数的增量 Δy 与自变量的增量 Δx 的比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

就是函数在区间 $(x_0,x_0+\Delta x)$ 或 $(x_0+\Delta x,x_0)$ 内的平均变化率；

(3) 当自变量的增量 $\Delta x\to 0$ 时，平均变化率的极限(如果存在的话)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

就是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的瞬时变化率，或简称为变化率，这就引出了微分学的基本概念——导数.

定义 2-1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx ($x_0+\Delta x$ 在该邻域内)，函数相应地有增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{2-3}$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，此极限值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**(**derivative**)，记作

$$f'(x_0)、y'\big|_{x=x_0}、\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}、\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},$$

即
$$f'(x_0)=y'\big|_{x=x_0}=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果极限不存在，就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导. 若不可导，是因为极限为无穷大，为方便起见，我们也称函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数为无穷大，记为 $f'(x_0)=\infty$.

不难看到，前面两个实例都是导数的问题，质点的变速直线运动规律是 $s=s(t)$，则质点在时刻 t_0 的瞬时速度 v 是 $s(t)$ 在点 t_0 的导数 $s'(t_0)$. 若细菌在时刻 t 的总数为 $N=N(t)$，则细菌在时刻 t_0 的瞬时繁殖速度为 $N(t)$ 在点 t_0 的导数 $N'(t_0)$.

在(2-3)式中令 $x=x_0+\Delta x$，则(2-3)式可以写成如下形式

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{2-4}$$

用此式来求函数在点 x_0 的导数有时更为简便.

在(2-3)式中，当自变量的增量 Δx 只从大于0的方向或小于0的方向趋于0时，和在(2-4)式中，当自变量 x 只从大于 x_0 的方向或小于 x_0 的方向趋于 x_0 时，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

或

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 右方可导或左方可导，其极限称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的**右导数**(**derivative on the right**)，或**左导数**(**derivative on the left**)，记作 $f'_+(x_0)$，或 $f'_-(x_0)$.

左导数、右导数统称为**单侧导数**.

由导数、左右导数的定义及极限理论可知：函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导的充分必要条件是，函数 $f(x)$ 在点 x_0 左导数、右导数都存在，且相等，即 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

若函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都可导，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导. 这时，对于 (a,b) 上任意一点 x，都有唯一确定的导数值 $f'(x)$ 与之对应，因此它是定义在区间 (a,b) 内的一个关于 x 的新函数，称它为原来函数 $y=f(x)$ 的**导函数**(**derived function**)，简称为导数，记作

$$f'(x),\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx},$$

即

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\quad x\in(a,b).$$

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导，它的导数仍然称之为导函数. $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 可视为导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即 $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$.

若用导数定义求函数 $y=f(x)$ 在一具体点 x_0 的导数，则常用(2-4)式，若求任意一点 x 的导数，常用(2-3)式.

例 2-1 已知函数 $y=x^2$，求 y'.

解 $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x,$$

于是

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

例 2-2 已知函数 $f(x)=\sqrt{x}$，求 $f'(9)$.

解法 1

$$f'(9)=\lim_{x\to 9}\frac{f(x)-f(9)}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}.$$

解法 2 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

则

$$f'(9)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\bigg|_{x=9}=\frac{1}{6}.$$



例 2-3　据 1985 年人口调查，我国有 10.15 亿人口，人口平均年增长率为 1.489%，根据英国神父马尔萨斯(Malthus，1766—1834)在 1798 年提出的著名的人口理论，我国人口增长模型

$$f(x)=10.15e^{0.01489x},$$

其中，x 代表年数$(0,1,2,\cdots)$，并定义 1985 年为这个模型的起始年 $x=0$. 按照此模型预测我国在 2000 年人口数为 12.6902 亿，实际据人口调查 2000 年我国人口数为 12.6583 亿. 按照此模型可以预测我国在 2008 年人口将有 14.2955 亿. 求我国人口增长率函数？怎样控制人口增长速度？

解　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=10.15e^{0.01489x}(e^{0.01489\Delta x}-1)$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=10.15e^{0.01489x}\frac{e^{0.01489\Delta x}-1}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=10.15e^{0.01489x}0.01489\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{0.01489\Delta x}-1}{0.01489\Delta x},$$

令 $y=e^{0.01489\Delta x}-1$，则 $0.01489\Delta x=\ln(1+y)$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{0.01489\Delta x}-1}{0.01489\Delta x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\ln(1+y)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{1/y}}=\dfrac{1}{1}=1$. 于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0.01489\times 10.15e^{0.01489x}.$$

由导数定义，人口增长率函数为：$f'(x)=0.01489\times 10.15e^{0.01489x}$.

让人口年增长率 0.01489 变小，人口的增长速度就变小，故可控制人口的增长.

为使我们对“导数是函数在某点的变化率”有一直观的认识，下面讨论导数的几何意义.

如图 2-1，设曲线 Γ 为函数 $y=f(x)$ 的图像. 在横坐标上取一点 x_0，并给其增量 Δx，曲线 Γ 上相应的点分别为 $M_0(x_0,f(x_0))$ 和 $M(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$，直线 M_0M 为曲线上的割线，β 为其倾斜角. 割线 M_0M 的斜率为

$$K_{割}=K_{M_0M}=\tan\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，点 M 沿着曲线 $y=f(x)$ 无限接近于 M_0 点，此时，割线 M_0M 以点 M_0 为支点转动趋向于直线 M_0T，直线 M_0M'、M_0M''表示割线 M_0M 趋向于直线 M_0T 的过程，割线 M_0M 的极限位置 M_0T 叫做曲线 $y=f(x)$ 的切线，α 为其倾斜角. 显然切线 M_0T 的斜率为

$$K_{切}=K_{M_0T}=\tan\alpha=\lim_{M\to M_0}K_{M_0M}=\lim_{\beta\to\alpha}\tan\beta$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

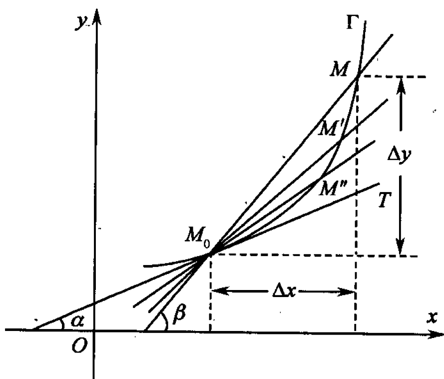


图 2-1

导数的几何意义：$f'(x_0)$表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0,f(x_0))$处切线的斜率.

由平面解析几何知识，若 $f'(x_0)$存在，曲线 $y=f(x)$在点 $M_0(x_0,f(x_0))$处的切线方程、法线方程分别为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

和
$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (f'(x_0)\neq 0).$$
显然$f'(x_0)=0$，曲线的切线方程为$y=f(x_0)$，法线方程为$x=x_0$. 值得注意，$f'(x_0)=\infty$时，曲线的切线、法线方程仍然存在. 切线方程为$x=x_0$，法线方程为$y=f(x_0)$.

例 2-4 求曲线$y=\sqrt{x}$在点$M_0(9,3)$点处的切线方程与法线方程.

解 由例2-2，$y'\big|_{x=9}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=9}=\frac{1}{6}$，得$k_{切}=\frac{1}{6}$，$k_{法}=-6$.

于是曲线$y=\sqrt{x}$在$M_0(9,3)$处的切线方程为：$y-3=\frac{1}{6}(x-9)$，即$6y-x-9=0$.

法线方程为$y-3=-6(x-9)$，即$y+6x-57=0$.

三、函数的可导与连续的关系

如果函数$y=f(x)$在点x处可导，则有$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x)\cdot 0=0.$$

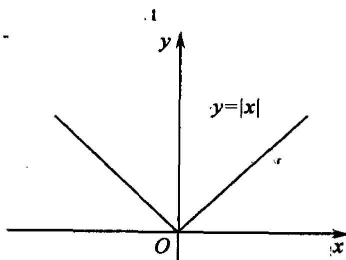


图 2-2

由此表明，$y=f(x)$在点x处连续. 于是有**函数$y=f(x)$在点x处可导，则函数在点x处必连续**. 反之未然，即函数$y=f(x)$在点x处连续，但在点x处未必可导. 例如，函数$f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$为初等函数，因此在其定义域$(-\infty,+\infty)$内连续，故在点$x=0$处连续，但在点$x=0$处不可导. 这是因为

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1.$$

所以$f'_-(0)\neq f'_+(0)$，因此函数在点$x=0$处不可导，读者可从图2-2中得到验证.

【思考与练习】

1. 平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$与$x$和$\Delta x$有关吗？瞬时变化率$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$与$x$和$\Delta x$有关吗？在平均变化率取极限的过程中$x$是常量还是变量，$\Delta x$是常量还是变量？

2. 指出下列命题是否正确，若有错误，错误何在？

(1) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)}{\frac{1}{n}}$存在，则函数$y=f(x)$在点$x_0$处可导；

(2) 函数$y=f(x)$在点x_0处的导数等于$[f(x_0)]'$；

(3) 函数$y=f(x)$在点x_0处连续，则$f(x)$在点x_0处可导；

(4) 函数$y=f(x)$在点x_0处可导，则$|f(x)|$在点x_0处可导；

(5) 函数$y=|f(x)|$在点x_0处可导，则$f(x)$在点x_0处可导；

(6) 初等函数在其定义区间内必可导.

3. 函数$y=f(x)$在点x_0处可导，曲线$y=f(x)$是否在点$(x_0,f(x_0))$处有切线？若曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处有切线，函数$y=f(x)$是否在点x_0处有导数？



第二节　初等函数的导数

一、按定义求导数

1. 常量的导数

设函数 $y=f(x)=c$（c 为常数），显然，$f(x+\Delta x)=c$，则有

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0,$$

即

$$(c)'=0.$$

2. 幂函数的导数

设函数 $y=x^n$（n 为自然数），则有

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}\right]=nx^{n-1},$$

即

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

特别，$n=1$ 时，$(x)'=1$. 更一般地，对于幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数），也有

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1},$$

这就是幂函数的导数公式，稍后将会在本章第二节例 2-15 中证明这个结果.

特别 $\alpha=\frac{1}{2}$时，$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$；$\alpha=-1$ 时，$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，这两个结果将会经常用到，最好熟记.

3. 对数函数的导数

设函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），则有

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]=\frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a},$$

即　$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$，特别，$a=e$ 时，则有　$(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

4. 正弦函数和余弦函数的导数

设函数 $y=\sin x$，则有

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x,$$

即 $$(\sin x)'=\cos x.$$

同理可得 $$(\cos x)'=-\sin x.$$

二、函数四则运算的求导法则

前面我们利用导数定义，计算了几个简单函数的导数(其结果可做为公式). 显而易见，对绝大多数函数来说，从定义出发来求导数是极其复杂的，计算量是很大的. 为此，我们将先建立基本的导数公式及求导法则，然后利用公式、运用法则来求函数的导数，即将求导运算公式化. 在已给的几个导数公式的基础上，我们先介绍四则运算求导法则.

设下面法则中的函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$，$u_1=u_1(x)$，$u_2=u_2(x)$，…，$u_n=u_n(x)$ 在点 x 处都可导，即 $u'=u'(x)$，$v'=v'(x)$，$u_1'=u_1'(x)$，$u_2'=u_2'(x)$，…，$u_n'=u_n'(x)$.

法则 2-1 两个函数代数和的导数等于每个函数的导数的原代数和，即

$$(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

推论 有限个函数的代数和的导数等于每个函数的导数的原代数和，即

$$(u_1\pm u_2\pm\cdots\pm u_n)'=u_1'\pm u_2'\pm\cdots\pm u_n'.$$

法则 2-2 两个函数乘积的导数等于两项之和，其中每一项都是一个函数的导数与另一个函数的乘积，即

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

推论 1 常数与函数乘积的导数等于常数乘以函数的导数，或者说“常数因子可移到导数符号外边来”，即

$$(cu)'=cu',\ (c\text{ 为常数}).$$

推论 2 n 个函数乘积的导数等于 n 项之和，其中每一项都是一个函数的导数与其余 $n-1$ 个函数的乘积(这样的项共有 n 项)，即

$$(u_1u_2\cdots u_n)'=u_1'u_2\cdots u_n+u_1u_2'\cdots u_n+\cdots+u_1u_2\cdots u_n'.$$

法则 2-3 两个函数商的导数仍是一个商，原分子函数的导数乘以分母函数与分母函数的导数乘以分子函数的差做分子，原分母函数的平方做分母，即

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq 0)\text{，特别，}u=1\text{ 时，}\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}.$$

以上三个法则可由导数的定义加以证明，请读者自行证明.

例 2-5 已知函数 $y=\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sin x-\ln 2$，求 y'.

解 $y'=(\sqrt{x})'-\left(\frac{1}{x}\right)'+(\sin x)'-(\ln 2)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}+\cos x-0=\frac{x\sqrt{x}+2}{2x^2}+\cos x.$

例 2-6 已知函数 $y=(x^4+2x^2-10)\cos x$，求 y'.

解 $y'=(x^4+2x^2-10)'\cos x+(x^4+2x^2-10)(\cos x)'$

$\quad=[(x^4)'+(2x^2)'-(10)']\cos x+(x^4+2x^2-10)\cdot(-\sin x)$



$$=(4x^3+4x)\cos x-(x^4+2x^2-10)\sin x$$
$$=4x(x^2+1)\cos x-(x^4+2x^2-10)\sin x.$$

例 2-7 已知函数 $y=\tan x$，求 y'.

解 $y'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$

即
$$(\tan x)'=\sec^2 x.$$
同理可得
$$(\cot x)'=-\csc^2 x.$$

例 2-8 已知函数 $y=\sec x$，求 y'.

解 $y'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x,$

即
$$(\sec x)'=\sec x\tan x.$$
同理可得
$$(\csc x)'=-\csc x\cot x.$$

例 2-7、例 2-8 的函数的导数可作为公式.

例 2-9 已知函数 $y=x^2\tan x+\dfrac{\ln x}{x}$，求 y'.

解 $y'=(x^2\tan x)'+\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=(x^2)'\tan x+x^2(\tan x)'+\dfrac{(\ln x)'x-(x)'\ln x}{x^2}$

$$=2x\tan x+x^2\sec^2 x+\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=2x\tan x+(x\sec x)^2+\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

三、反函数的求导法则

为了讨论指数函数（对数函数的反函数）与反三角函数（三角函数的反函数）的导数，我们首先讨论反函数的求导法则.

定理 2-1 如果函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 上单调、可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间 I_x（$I_x=\{x\mid x=\varphi(y),y\in I_y\}$）上可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

证明从略. 此定理表明，反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

例 2-10 已知 $y=a^x$，（$a>0$ 且 $a\neq 1$），求 y'.

解 已知 $y=a^x$ 是 $x=\log_a y$ 的反函数，而 $x=\log_a y$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调可导，且

$$(\log_a y)'=\frac{1}{y\ln a}\neq 0.$$

故在对应的区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，有

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=y\ln a=a^x\ln a,$$

即 $(a^x)'=a^x\ln a$；特别，$a=e$ 时，有 $(e^x)'=e^x$.

例 2-11 已知函数 $y=\arcsin x$，$\left(-1<x<1,\ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$，求 y'.

解 已知 $y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 的反函数. $x=\sin y$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调、可导，且 $(\sin y)'=\cos y>0$，故在 $(-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

即
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得 $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

四、复合函数的求导法则

我们经常遇到的函数多是由几个基本初等函数复合而成的复合函数．因此，复合函数的求导法则是求导运算经常用到的一个非常重要的的法则，需要熟练地掌握．

定理 2-2 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，而函数 $y=f(u)$ 在其对应点 $u(u=\varphi(x))$ 处可导，且复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 有意义，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 处可导，且
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad 或 \quad y'_x=y'_u u'_x$$
或写成
$$[f(\varphi(x))]'=f'_x(\varphi(x))=f'(\varphi(x))\varphi'(x) \tag{2-5}$$

证明 给自变量 x 一增量 Δx，则有函数 $u=\varphi(x)$ 的增量 Δu，又由 Δu，则有函数 y 的增量 Δy.

已知函数 $y=f(u)$ 在点 u 处可导，则有
$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u),$$
由极限与无穷小量之间的关系，存在 $\Delta u\to 0$ 时的无穷小量 $\alpha=\alpha(\Delta u)$，使
$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha,$$
于是
$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

由于 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，则 u 在点 x 处连续，所以当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$，因此
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\alpha$$
$$=f'(u)\varphi'(x)+\varphi'(x)\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=f'(u)\varphi'(x)=f'(\varphi(x))\varphi'(x),$$
即
$$[f(\varphi(x))]'=f'_x(\varphi(x))=f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

式(2-5)说明，求复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的导数时，只需求出函数 $y=f(u)$ 对中间变量 u 的导数和 $u=\varphi(x)$ 的导数，然后两者相乘即可．但要注意最后的导数结果中需将 u 用 $\varphi(x)$ 代换过来.

另外，值得注意的是 $[f(\varphi(x))]'$ 与 $f'(\varphi(x))$ 的区别，前者表示的是复合函数 $f(\varphi(x))$ 对 x 求导，后者表示的是将 $\varphi(x)$ 看成一个变量，$f(\varphi(x))$ 关于 $\varphi(x)$ 求导.

此定理可以推广到任意有限个函数复合而成的复合函数情形．仅以三个函数复合而成的复合函数求导为例：$y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$ 都可导，且复合函数 $y=f(\varphi(\psi(x)))$ 有定义，则复合函数的导数为
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} \quad 或 \quad y'_x=y'_u u'_v v'_x$$
或
$$[f(\varphi(\psi(x)))]'=f'_x[\varphi(\psi(x))]=f'(u)\varphi'(v)\psi'(x) \tag{2-6}$$

公式(2-5)、(2-6)可以看出复合函数求导时，因变量、中间变量、自变量一环扣一环地求导，就像链锁一样，环环相接，因此将复合函数求导法则形象地称为**链锁法则(chain rule)**.



例 2-12　已知函数 $y=(x^2+x+1)^{100}$，求 y'.

解　令 $y=u^{100}$，$u=x^2+x+1$，则有

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(u^{100})'(x^2+x+1)'=100u^{99}(2x+1)=100(x^2+x+1)^{99}(2x+1).$$

例 2-13　已知函数 $y=\ln\sin x^2$，求 y'.

解　令 $y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=x^2$，则有

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=(\ln u)'(\sin v)'(x^2)'=\frac{1}{u}(\cos v)(2x)=2x\frac{\cos x^2}{\sin x^2}=2x\cot x^2.$$

比较熟练后，把中间变量默记于心中，不必写出来，直接按链锁法则对复合函数求导.

例 2-14　已知函数 $y=\sqrt[3]{1-2x^2}$，求 y'.

解　$y'=[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}]'=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}(1-2x^2)'=\frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}(-4x)$

$$=\frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}.$$

例 2-15　已知幂函数 $y=x^\alpha$，（α 为实数），试证明 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

证　将 $y=x^\alpha$ 化成 $y=e^{\alpha\ln x}$，则有

$$y=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'=x^\alpha\alpha\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1},$$

即

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

例 2-16　已知函数 $y=x^{\sin x}$，求 y'.

解　$y=x^{\sin x}$ 为幂指函数，求其导数时先将其化为指数形式，即 $y=e^{\sin x\ln x}$.

$$y'=e^{\sin x\ln x}(\sin x\ln x)'=x^{\sin x}[(\sin x)'\ln x+\sin x(\ln x)']=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

例 2-17　已知函数 $y=\sin 2x\ln\sin x-x\cos 2x$，求 y'.

解　$y'=(\sin 2x\ln\sin x)'-(x\cos 2x)'$

$$=(\sin 2x)'\ln\sin x+\sin 2x(\ln\sin x)'-x'\cos 2x-x(\cos 2x)'$$

$$=\cos 2x\cdot 2\ln\sin x+\sin 2x\frac{1}{\sin x}\cos x-\cos 2x+2x\sin 2x$$

$$=2\cos 2x\ln\sin x+2x\sin 2x+1.$$

例 2-18　放射性同位素碘 ^{131}I 被广泛用来研究甲状腺的机能. 现将含量为 N_0 的碘 ^{131}I 静脉推注于病人的血液中，血液中 t 时刻碘的含量为 $N=N_0e^{-kt}$（其中 k 为正常数），试求血液中碘的减少速度.

解　$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=(N_0e^{-kt})'=N_0e^{-kt}(-kt)'=N_0e^{-kt}(-k)=-kN_0e^{-kt}$

因此血液中碘的减少速度为 $-kN_0e^{-kt}$.

另外由上式可知 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-kN$，这表明碘的减少速率与它当时所存在的量成正比.

例 2-19　在人口增长阻滞问题中，人口数 x 是时间 t 的函数，其关系式为

$$x(t)=\frac{k}{1+\left(\frac{k}{x_0}-1\right)e^{-rt}},$$

其中，k 为自然资源和环境条件所能允许的最大人口数，r 来表示净增长率，x_0 为起始年 $t=0$ 时的人口数，求人口的增长速度.

解 $$x'(t)=-\frac{-k(-r)\left(\frac{k}{x_0}-1\right)e^{-rt}}{\left(1+\left(\frac{k}{x_0}-1\right)e^{-rt}\right)^2}=\frac{kr\left(\frac{k}{x_0}-1\right)e^{-rt}}{\left(1+\left(\frac{k}{x_0}-1\right)e^{-rt}\right)^2}=rx\left(1-\frac{x(t)}{k}\right).$$

所以人口的增长速度为

$$\frac{kr\left(\frac{k}{x_0}-1\right)e^{-rt}}{\left(1+\left(\frac{k}{x_0}-1\right)e^{-rt}\right)^2}，\text{或写成 } rx\left(1-\frac{x(t)}{k}\right).$$

此人口增长模型比较符合实际情况．而例 2-3 中，Malthus 人口模型在短期，一定范围内对人口估计有很好的近似程度.

五、隐函数的求导法则

前面我们讨论的函数都是能明确写成关于自变量的解析式 $y=f(x)$．这样的函数称为**显函数**(**explicit function**)．但有时会遇到自变量 x 与因变量 y 之间的函数 f 是由方程 $F(x,y)=0$ 在一定条件下所确定的，这样的函数称为**隐函数**(**implicit function**)．例如，$x^2+y^3=1$ 和 $e^{xy}-x+y=0$ 等都是隐函数．有些隐函数，可以化成显函数，如隐函数 $x^2+y^3=1$ 可化成显函数 $y=\sqrt[3]{1-x^2}$，这叫做隐函数的显化．但隐函数的显化有时是很困难的，甚至是无法进行的．实际上隐函数求导，并不需要将其显化，也不需要引进新的方法，只要对方程 $F(x,y)=0$ 两端分别对 x 进行求导．在求导过程中注意 y 是 x 的函数，即视 $F(x,y)$ 为 x 的复合函数 $F(x,f(x))$，然后利用复合函数求导法则求导，便可得到函数 y 导数.

例 2-20 由椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 确定的函数 $y=f(x)$，求 y'.

解 对方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边分别关于 x 求导，

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0,$$

得
$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

注：隐函数的导数结果中允许含有因变量 y.

例 2-21 由方程 $e^y=xy+e$ 所确定的函数 $y=f(x)$，求 y' 和 $y'\big|_{x=0}$.

解 对方程 $e^y=xy+e$ 两边分别关于 x 求导，

$$e^yy'=y+xy',$$

得
$$y'=\frac{y}{e^y-x}.$$

当 $x=0$ 时，由方程 $e^y=xy+e$ 解得 $y\big|_{x=0}=1$，所以 $y'\big|_{x=0}=e^{-1}$.

例 2-22 生物群体总数的生长规律为

$$x=x_0\frac{1+l}{1+le^{-rt}},$$

其中 $x=x(t)$ 为生物群体在 t 时刻的总数，l、r、x_0 均为常数，且 $l>0$，试求生长率 $x'(t)$.

解 此函数可写成

$$x+le^{-rt}x-x_0(1+l)=0.$$

对于上式两边分别关于 t 求导

$$x' - rle^{-rt}x + le^{-rt}x' = 0,$$

得
$$x' = \frac{rle^{-rt}}{1 + le^{-rt}}x.$$

上式可进一步化成以下两种形式：

$$x' = \frac{x_0 rl(1+l)e^{-rt}}{(1+le^{-rt})^2}$$

或
$$x' = (r - kx)x \qquad \left(k = \frac{r}{x_0\ (1+l)}\right).$$

前一种形式将生长率 $x'(t)$ 表示成时间 t 的显函数；后一种形式的实际意义将会在第五章第五节的内容中作进一步的介绍.

六、对数求导法

对显函数，直接求导有时会很麻烦. 对其进行适当的恒等变换，将其隐化，然后按隐函数去求导，往往会简单得多，如例2-22. 对显函数表达式两边取自然对数，并利用对数的性质进一步化简，将显函数隐化，也是常见的一种恒等变换. 采用这种变换，然后利用隐函数的求导方法去求导，这种求导方法称为**对数求导法**. 适用这种方法常见的函数有 $y = \sqrt[n]{\frac{f_1(x)f_2(x)\cdots f_l(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_m(x)}}$ (l、m、n 为自然数) 和幂指函数 $y = u(x)^{v(x)}$.

例 2-23 已知函数 $y = \sqrt[3]{\frac{(x-1)(x^2+2)}{(x-3)(e^x+4)}}$, 求 y'.

解 两边取对数, 得

$$\ln y = \frac{1}{3}[\ln(x-1) + \ln(x^2+2) - \ln(x-3) - \ln(e^x+4)].$$

再对上式两边关于 x 求导, 得

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x-3} - \frac{e^x}{e^x+4}\right),$$

于是
$$y' = \frac{1}{3}y\left(\frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x-3} - \frac{e^x}{e^x+4}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x-1)(x^2+2)}{(x-3)(e^x+4)}}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x-3} - \frac{e^x}{e^x+4}\right).$$

注：用对数求导法求导，导数结果中的 y 一定用其表达式代回，不允许含有 y.

例 2-24 已知函数 $y = (\tan x)^{\sin x}$，求 y'.

解 两边取对数，得

$$\ln y = \sin x \ln\tan x.$$

再对上式两边关于 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \ln\tan x + \sin x\,\frac{1}{\tan x}\sec^2 x.$$

故
$$y' = y(\cos x\ln\tan x + \sec x) = (\tan x)^{\sin x}(\cos x\ln\tan x + \sec x).$$

注：对于幂指函数 $y = u(x)^{v(x)}$，既可像例 2-24 那样利用对数求导法求导，也可像例 2-16那样，将其化为指数函数 $y = e^{v(x)\ln u(x)}$，利用复合函数求导法则求导.

七、初等函数的导数

初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合而构成的仅由一

个解析式表达的函数. 因此，利用前面推得的基本初等函数的导数（称为导数基本公式），函数的四则运算求导法则和复合函数的求导法则，就完全可以求出初等函数的导数. 这些公式、法则非常重要，为了便于查阅，将导数公式、求导法则汇总如下：

（一）导数基本公式

1. $(c)'=0$，（c 为常数）
2. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$，（$\alpha$ 为实数）.
3. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，（$a>0$ 且 $a\neq1$）
4. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
5. $(a^x)'=a^x\ln a$，（$a>0$ 且 $a\neq1$）
6. $(e^x)'=e^x$
7. $(\sin x)'=\cos x$
8. $(\cos x)'=-\sin x$
9. $(\tan x)'=\sec^2 x$
10. $(\cot x)'=-\csc^2 x$
11. $(\sec x)'=\sec x\tan x$
12. $(\csc x)'=-\csc x\cot x$
13. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

（二）求导法则

1. 四则运算求导法则

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均可导，则

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$；

（2）$(uv)'=u'v+uv'$，特别 $v=c$，$(cu)'=cu'$；

（3）$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$，特别 $u=1$，$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$，$(v\neq0)$.

2. 复合函数求导法则

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，而函数 $y=f(u)$ 在其对应的点 $u(u=\varphi(x))$ 处可导，且复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 有意义，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 处可导，且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\quad 或\quad y'_x=y'_u u'_x$$

或

$$[f(\varphi(x))]'=f'_x(\varphi(x))=f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

八、高阶导数

函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数. 我们可以继续讨论 $f'(x)$ 的导数. 如果 $f'(x)$ 仍然可导，则它的导数称为函数 $y=f(x)$ 的**二阶导数（second derivative）**，记作

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

类似，如果二阶导数 $y''=f''(x)$ 可导，则它的导数称为函数 $y=f(x)$ 的**三阶导数（third derivative）**，记作

$$y''',\ f'''(x),\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^3f(x)}{dx^3}.$$

依此类推，若函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数仍然可导，则它的导数，称为 $f(x)$ 的 **n 阶导数（n-order derivative）**，记作

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n},\ \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

函数 $y=f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数，则 $f(x)$ 在点 x 的某一邻域内一定具有一切低于



n 阶的导数. 二阶以及二阶以上的导数，统称为**高阶导数**(**higher derivative**).

质点做变速直线运动的运动规律(函数)是 $s=s(t)$，则 $s(t)$ 的导数是质点在 t 时刻的瞬时速度，即 $v(t)=s'(t)$. 速度 $v(t)$ 对时间 t 的变化率($v(t)$ 的导数)是质点在 t 时刻的加速度，即 $a=v'(t)=(s'(t))'=s''(t)$. 也就是说 $s(t)$ 的二阶导数为加速度，这便是二阶导数的物理意义.

例 2-25 已知 n 次多项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，求 $P_n(x)$ 的各阶导数.

解 $P_n'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$,

$P_n''(x)=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\cdots+2a_{n-2}$.

在求导次数小于等于 n 时，多项式求导仍为多项式，且每求一次导数，$P_n(x)$ 的次数降低一次，不难得到 $P_n(x)$ 的 n 阶导数是

$$P_n^{(n)}(x)=n(n-1)\cdots2\cdot1a_0=n!a_0,$$

而

$$P_n^{(n+1)}(x)=P_n^{(n+2)}(x)=\cdots=0.$$

于是，n 次多项式 $P_n(x)$ 的 n 阶导数是常数 $n!a_0$，高于 n 阶的导数皆为 0.

例 2-26 已知指数函数 $y=e^{ax}$(a 为常数)，求 $y^{(n)}$.

解 $y'=ae^{ax}$，$y''=a^2e^{ax}$，$y'''=a^3e^{ax}$,

一般地，有 $y^{(n)}=a^ne^{ax}$.

例 2-27 已知正弦函数 $y=\sin x$，求 $y^{(n)}$.

解 $y'=(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,

$$y''=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\left[\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

一般地，有 $(\sin x)^{(n)}=y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

类似地，可得 $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

例 2-28 设由方程 $y=xe^y$ 确定的函数 $y=f(x)$，求 y''.

解 对方程 $y=xe^y$ 两边关于 x 求导，得

$$y'=e^y+xe^yy',$$

整理得

$$y'=\frac{e^y}{1-xe^y}=\frac{e^y}{1-y}.$$

于是

$$y''=(y')'=\left(\frac{e^y}{1-y}\right)'=\frac{e^yy'(1-y)-e^y(-y')}{(1-y)^2}$$

$$=\frac{2-y}{(1-y)^2}e^yy'=\frac{2-y}{(1-y)^2}e^y\frac{e^y}{1-y}=\frac{(2-y)e^{2y}}{(1-y)^3}.$$

在求 y'' 时，也可对方程 $y'=e^y+xe^yy'$ 两边关于 x 求导，得

$$y''=e^yy'+e^yy'+xe^y(y')^2+xe^yy'',$$

整理得

$$y''=\frac{e^yy'(2+xy')}{1-xe^y}=\frac{e^y\frac{e^y}{1-y}\left(2+x\frac{e^y}{1-y}\right)}{1-y}=\frac{(2-y)e^{2y}}{(1-y)^3}.$$

*九、由参数方程所确定的函数的求导法则

表达函数关系的方法有很多种，有以 $y=f(x)$ 形式给出的，有由方程 $F(x,y)=0$ 确定的等等. 下面再介绍一种以参变量的形式给出的函数关系，并讨论它的导数问题.

假定参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

可以确定函数 $y=f(x)$（即 $y=f(x)$ 可视为由 $y=y(t)$，$t=x^{-1}(x)$ 所复合的复合函数），并且假设 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 均可导，且 $x'(t)\neq 0$，则此函数关于自变量 x 可导，由复合函数求导法则以及反函数的求导法则，可得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)},$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{2-7}$$

可以进一步求出其二阶导数：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3} \tag{2-8}$$

公式(2-7)、(2-8)书写时，$\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$的结果是关于 t 的表达式，实际上，它应是 x 的函数，可由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3} \end{cases}$$

表示. 因此，求函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，就是利用参数方程求导公式对$\frac{dy}{dx}$再求一阶导数，便可得到其二阶导数结果，因此公式(2-8)无需记忆.

例 2-29 已知参数方程$\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = 1-\cos t \end{cases}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 由公式(2-7)、(2-8)，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\cot\frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\sin t}{(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{(1-\cos t)^2}=-\frac{1}{4}\csc^4\frac{t}{2},$$

或

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}=\frac{-\frac{1}{2}\csc^2\frac{t}{2}}{1-\cos t}=-\frac{1}{4}\csc^4\frac{t}{2}.$$

【思考与练习】

1. 下列求导计算中有无错误，若有错误，错误何在？

(1) 设函数 $y=\ln(1-x)$，则 $y'=\frac{1}{1-x}$；

(2) 设函数 $y=x^x$，则 $y'=x\cdot x^{x-1}$；

(3) 设函数 $y=\frac{\sin x}{x}+\ln 2$，则 $y'=\frac{x\cos x+\sin x}{x^2}+\frac{1}{2}$；

(4) 设函数 $y=e^{a+e^x}$，则 $y'=e^{a+x+e^x}$.



2. 下列命题中有无错误，若有错误，错误何在?

(1) 设函数 $y=u(x)v(x)$，且 $u(x)$、$v(x)$ 可导，则 $y'=u'(x)v'(x)$；

(2) 设函数 $y=u(x)v(x)$，且 $u(x)$、$v(x)$ 二阶可导，则 $y''=u''(x)v(x)+u(x)v''(x)$；

(3) 设函数 $y=f(x)$ 是 $x=\varphi(y)$ 的反函数，则 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$；

(4) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，而函数 $g(x)$ 在点 x_0 处不可导，则 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处不可导；

(5) 函数 $f(x)$、$g(x)$ 在点 x_0 处都不可导，则 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处也不可导；

(6) 函数 $f(x)$. $g(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$、$g(x)$ 在点 x_0 处均可导.

第三节　微　　分

一、微分的概念

通过导数，我们研究了函数变化率的大小，即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 当 $\Delta x\to 0$ 时的极限，并未研究函数增量 Δy 本身. 但在许多实际问题中，我们常常需要研究在自变量发生微小变化时，函数的增量 Δy 的大小. 一般说来，Δy 是 Δx 的复杂的函数，要计算其精确值是非常困难的. 例如，对简单的函数 $y=x^8$，要计算 $\Delta y=(x+\Delta x)^8-x^8$ 是相当麻烦的. 我们可以利用微分(关于 Δx 的线性函数)来近似计算 Δy. 这样计算既简单又有较好的精确度.

先分析两个实例，从而引出微分学另一基本概念——微分.

1. 面积的改变量

一块正方形金属薄片受温度变化的影响，边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$，问此薄片的面积改变了多少?

设此薄片的边长为 x，则薄片的面积 $S=x^2$，面积的增量为

$$\Delta S=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2,$$

上式中右边由两部分构成，第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，即图 2-3 中两个小矩形面积之和；第二部分 $(\Delta x)^2$ 是当 $\Delta x\to 0$ 时关于 Δx 的高阶无穷小量，即图 2-3 中右上角小正方形的面积. 因此，第一部分 $2x_0\Delta x$ 是主要部分；第二部分 $(\Delta x)^2$ 是次要部分，当 $|\Delta x|$ 很小时我们可以忽略这一部分，而以其线性主要部分来近似代替面积的增量 ΔS，即 $\Delta S\approx 2x_0\Delta x$.

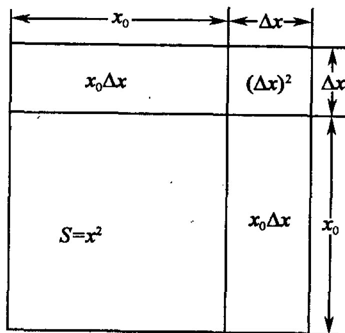


图 2-3

2. 自由落体运动的路程改变量

自由落体运动的路程 s 与时间 t 的关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

当时间从 t_0 变化到 $t_0+\Delta t$ 时，路程 s 有相应增量

$$\Delta s=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2=gt_0\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2.$$

上式右边第一部分 $gt_0\Delta t$ 是 Δt 的线性函数. 第二部分 $\dfrac{1}{2}g(\Delta t)^2$ 是当 $\Delta t\to 0$ 时关于 Δt 的一个高阶无穷小量. 因此当 $|\Delta t|$ 很小时，我们可以忽略第二部分，而得到路程的增量 Δs 的近似值：$\Delta s\approx gt_0\Delta t$.

上面两例所代表的实际意义虽然不同，但其数学表达的形式完全相同. 抛开它们的具体实际意义，把这种数学形式抽象出来. 当函数 $y=f(x)$，满足一定条件时，函数的增量 Δy 总可以写成关于 Δx 的线性函数与关于 Δx 的高阶无穷小量之和，即表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，因此 $A\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，且它与 Δy 之差

$$\Delta y-A\Delta x=o(\Delta x)$$

是比 Δx 高阶的无穷小. 所以，当 $A\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，我们就可以用 $A\Delta x$ 近似地来代替 Δy，即

$$\Delta y\approx A\Delta x,$$

这时 $A\Delta x$ 就有了特殊的意义.

定义 2-2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，给自变量 x 以增量 Δx（$x_0+\Delta x$ 在该邻域内），如果函数的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x) \tag{2-9}$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，而 $o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小量（当 $\Delta x\to 0$ 时），那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是**可微的（differentiable）**，$A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的**微分（differential）**，记作 dy，即

$$dy=A\Delta x \tag{2-10}$$

若函数 $y=f(x)$ 的增量 Δy 不能写成(2-9)式的形式，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可微. 函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作 dy 或 $df(x)$.

下面，我们讨论对任意点 x，在 $f(x)$ 可微时，常数 A 的取值.

定理 2-3 若函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，则函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，且 $f'(x)=A$，即 $dy=f'(x)\Delta x$.

证明 若函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，则有

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

因而
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

故
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right]=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A.$$

即函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，且 $f'(x)=A$，即 $dy=f'(x)\Delta x$.

根据上述分析，可知微分具有以下两个重要性质：

（1） 函数微分 dy 与自变量的增量 Δx 成正比，即 dy 是 Δx 的线性函数；

（2） 当 $\Delta x\to 0$ 时，函数的微分 dy 与函数的增量 Δy 相差一个高阶无穷小量. 或者说，dy 是在 Δy 中忽略高阶无穷小后所剩的主要部分.

由此，通常将微分 dy 叫做函数增量 Δy 的**线性主部**，它是研究函数微小增量的有力工具，在整个微积分学中起着重要的作用.

由微分的定义与定理 2-3 可知，只要求出导数，微分也就求出来了. 因此求微分的问题，可归结为求导数的问题，故求导数的的方法又叫做**微分法**.

为了对微分这一概念有比较直观的了解，我们来看看微分的几何意义.

如图 2-4，在横坐标上取一点 x_0，给其增量 Δx，得横坐标上另一点 $x_0+\Delta x$，并标记曲线 $y=f(x)$ 上相应的点分别为 $M_0(x_0,f(x_0))$ 和 $M(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$. 可知 $M_0N=\Delta x$，$MN=\Delta y$.



过 M_0 点做切线 M_0T，M_0T 交虚线 MN 于 P 点其斜率为 $\tan\alpha$，则

$$PN = M_0N \cdot \tan\alpha = \Delta x f'(x_0) = dy.$$

由此，**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的微分等于曲线 $y=f(x)$ 在该点切线的纵坐标的增量**.

因此，用函数的微分 dy 近似代替函数的增量 Δy，就是用点 M_0 处切线的纵坐标的增量 PN 近似代替曲线 $f(x)$ 纵坐标的增量 MN，且误差为 $MP = MN - PN = \Delta y - dy = o(\Delta x)$.

当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\Delta y - dy|$ 比 $|\Delta x|$ 小得多. 因此，M_0 点附近，可以用切线段 M_0P 上的点近似代替曲线段 $\overset{\frown}{M_0M}$ 上相应的点，即用切线段 M_0P 近似代替曲线段 $\overset{\frown}{M_0M}$，称之为局部"**以直代曲**".

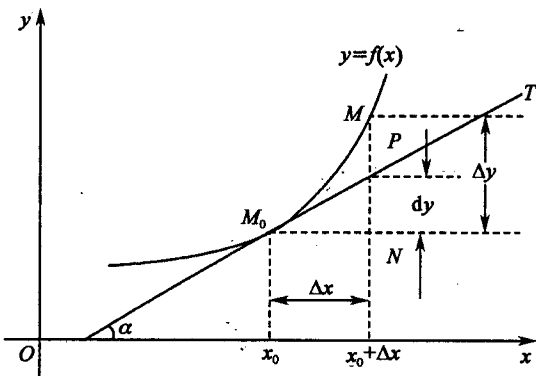


图 2-4

二、微分与导数的关系

由定理 2-3 我们得到，函数 $y=f(x)$ 若可微，则它在对应点(或区间)必可导，且

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

反之，函数 $y=f(x)$ 可导，函数 $f(x)$ 是否可微，若可微，此时常数 A 的取值又如何.

定理 2-4　若函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，则函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，且 $A=f'(x)$，即 $dy=f'(x)\Delta x$.

证明　若函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

根据极限与无穷小的关系，当 $\Delta x\to 0$ 时，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

即　　$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$，其中　　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$.

由 $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$，$f'(x)$ 为与 Δx 无关的常数记为 A，故上式相当于 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$，所以 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，且 $A=f'(x)$，即 $dy=f'(x)\Delta x$.

由此可见，函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，并且 $A=f'(x)$，于是函数 $f(x)$ 的微分 dy 可以写成

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

我们再由自变量的微分与函数增量的关系，来研究函数 $f(x)=x$ 的微分. 由于 $f'(x)=1$，所以

$$dx = (x)'\Delta x = \Delta x.$$

此式说明，自变量的微分等于自变量的增量. 从而可得微分公式

$$dy = f'(x)dx. \tag{2-11}$$

可写成

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

因此函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 等于函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 的商，因此导数亦称为

微商(differential quotient)就源于此. 曾用$\frac{dy}{dx}$表示导数，那时$\frac{dy}{dx}$是作为一个整体符号使用的，它并不具有商的意义. 当引入微分的概念之后，这一符号才有商的含义. 这一点在分析运算中，会给我们带来很大方便.

三、微分的基本公式与法则

从公式(2-11)可知，求函数 $y=f(x)$ 的微分，只要求出函数的导数后再乘以自变量的微分即可. 因此，根据函数的导数基本公式，可以得到微分的基本公式；根据求导法则，可以得到求微分法则. 我们将微分的基本公式及微分法则汇总如下：

(一) 微分的基本公式

1. $dc=0$，(c 为常数)
2. $dx^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}dx$，($\alpha$ 为实数)
3. $d\log_a x=\frac{1}{x\ln a}dx$，($a>0$ 且 $a\neq1$)
4. $d\ln x=\frac{1}{x}dx$
5. $da^x=a^x\ln a dx$，($a>0$ 且 $a\neq1$)
6. $de^x=e^x dx$
7. $d\sin x=\cos x dx$
8. $d\cos x=-\sin x dx$
9. $d\tan x=\sec^2 x dx$
10. $d\cot x=-\csc^2 x dx$
11. $d\sec x=\sec x\tan x dx$
12. $d\csc x=-\csc x\cot x dx$
13. $d\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
14. $d\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
15. $d\arctan x=\frac{1}{1+x^2}dx$
16. $d\text{arccot} x=-\frac{1}{1+x^2}dx$

(二) 求微分法则

1. $d(u\pm v)=du\pm dv$；
2. $d(uv)=vdu+udv$，$d(cu)=cdu$；
3. $d\frac{u}{v}=\frac{vdu-udv}{v^2}$，$d\frac{1}{v}=-\frac{dv}{v^2}$，($v\neq0$).

例 2-30 已知函数 $y=x^3-x$，求在 $x=2$ 时函数的微分 dy.

解 由于 $y'=3x^2-1$，于是 $y'|_{x=2}=11$，

所以 $dy=y'|_{x=2}dx=11dx$.

例 2-31 已知函数 $y=e^x+x^2\sin x$，求 dy.

解 法 1 由微分公式(2-11)直接求得.

因为 $y'=e^x+2x\sin x+x^2\cos x$，所以 $dy=(e^x+2x\sin x+x^2\cos x)dx$.

法 2 $dy=d(e^x)+d(x^2\sin x)=e^x dx+\sin x dx^2+x^2 d\sin x$

$=e^x dx+2x\sin x dx+x^2\cos x dx=(e^x+2x\sin x+x^2\cos x)dx$.

例 2-32 已知函数 $y=x^2$，求在 $x=1$，$\Delta x=0.01$ 时的函数增量 Δy 与微分 dy.

解 $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=(1+0.01)^2-1^2=0.0201$.

$y'=2x$，$y'|_{x=1}=2$，则有

$dy=y'|_{x=1}\Delta x=2\times0.01=0.02$.

四、一阶微分形式不变性

设函数 $y=f(x)$ 有导数，则有

(1) 若 x 为自变量时，显然 $dy=f'(x)dx$；



（2）若 x 为中间变量，是另一自变量 t 的可微函数 $x=\varphi(t)$，因而函数 y 成为 t 的复合函数，根据复合函数的微分法，y 对自变量 t 的导数为

$$y'=\frac{dy}{dt}=f'(x)\varphi'(t),$$

于是
$$dy=f'(x)\varphi'(t)dt.$$
又因为
$$\varphi'(t)dt=dx,$$
所以
$$dy=f'(x)dx.$$

综上，无论 x 为自变量还是中间变量，函数 $y=f(x)$ 的微分形式总是不变的，即 $dy=f'(x)dx$，这种性质叫做**一阶微分形式的不变性**.

由此可知，基本初等函数的微分公式，其意义也可加以推广，譬如，$d(\tan u)=\sec^2 u du$，$d(e^u)=e^u du$ 等等，这里，u 不仅可以是自变量，也可以是一个函数，这对于求复合函数的微分十分方便.

例 2-33　已知函数 $y=e^{ax^2+bx+c}$，求 dy.

解　令 $u=ax^2+bx+c$，则 $y=e^u$，故 y 是 x 的复合函数. 利用微分形式不变性，得

$$dy=(e^u)'du=e^u du=e^{ax^2+bx+c}(ax^2+bx+c)'dx=e^{ax^2+bx+c}(2ax+b)dx.$$

在求复合函数微分时，可以不把中间变量写出来，而直接利用微分形式的不变性求其微分.

例 2-34　已知函数 $y=\ln(x^2+x+2)$，求 dy.

解　$dy=(\ln(x^2+x+2))'d(x^2+x+2)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+2}dx.$

例 2-35　已知函数 $y=e^{\sin x}\cos x$，求 dy.

解
$$\begin{aligned}dy&=\cos x de^{\sin x}+e^{\sin x}d\cos x=\cos x e^{\sin x}d\sin x-e^{\sin x}\sin x dx\\&=\cos^2 x e^{\sin x}dx-e^{\sin x}\sin x dx=(\cos^2 x-\sin x)e^{\sin x}dx.\end{aligned}$$

例 2-36　在下列等式的括号中填入适当函数，使其等式成立.

（1）$d(\quad)=xdx$；　　（2）$d(\quad)=e^{\lambda x}dx(\lambda\neq 0)$.

解　（1）因为 $xdx=\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)'dx$，所以 $d\left(\dfrac{x^2}{2}\right)=xdx$，一般有 $d\left(\dfrac{x^2}{2}+c\right)=xdx$.

（2）因为 $e^{\lambda x}dx=\left(\dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right)'dx$，所以 $d\left(\dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right)=e^{\lambda x}dx$，一般有 $d\left(\dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}+c\right)=e^{\lambda x}dx$.

五、微分在近似计算中的应用

由函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微知道：$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$. 显然，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线方程为 $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. 也就是说，在点 x_0 附近，可以用切线近似代替曲线，即人们常说的"以直代曲". 从而 $f(x)$ 可以用 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 来近似计算，即当 $|x-x_0|$ 很小时，有

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

记 $\Delta x=x-x_0$，有

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

若取 $x_0=0$，即 $|x|$ 很小时，有

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x.$$

因此，当 $|x|$ 很小时，可推出下列近似公式：

（1）$e^x\approx 1+x$；　（2）$\ln(1+x)\approx x$；　（3）$\sin x\approx x$（x 用弧度单位）；

（4）$\tan x\approx x$（x 用弧度单位）；（5）$(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x$，特别 $\alpha=\dfrac{1}{n}$ 时，$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{n}x$.

例 2-37 计算 $\sqrt[3]{1.003}$的近似值.

解 法 1 令$f(x)=\sqrt[3]{x}$，取 $x_0=1$，$\Delta x=0.003$.

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}，得 f(1)=1，f'(1)=\frac{1}{3}，$$

于是 $\sqrt[3]{1.003}=f(1.003)\approx f(1)+f'(1)\times 0.003=1+\frac{1}{3}\times 0.003=1.001.$

法 2 令$f(x)=\sqrt[3]{1+x}$，$\sqrt[3]{1.003}=\sqrt[3]{1+0.003}$，这里$|x|=0.003$ 比较小，可利用上面近似公式(5)($n=3$) $\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x$，于是

$$\sqrt[3]{1.003}\approx 1+\frac{1}{3}\times 0.003=1.001.$$

例 2-38 在半径为 1 厘米的铁球表面镀上一层厚度为 0.01 厘米的纯铜，试计算大约需要多少铜(铜的密度为 8.9 克/厘米^3)?

解 半径为 R 的球的体积公式为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，得 $V'=4\pi R^2$.

取 $R_0=1$，$\Delta R=0.01$，则大约需要纯铜的体积，即球的体积的增量

$\Delta V\approx V'(R_0)\Delta R=4\pi R_0^2\Delta R=4\times 3.14\times 1^2\times 0.01=0.1256$ 厘米^3

大约需要纯铜 $M=\rho\Delta V\approx 8.9\times 0.1256\approx 1.118$(克).

【思考与练习】

1. 函数 $y=f(x)$在点 x 处可微，当$|\Delta x|$很小时，为什么可用 dy 近似地表示 Δy? 优越性何在?

2. 回答下列问题

(1) 函数 $y=f(x)$在点 x 处可微，试问函数 $y=f(x)$在点 x 处是否连续，为什么?

(2) 函数 $y=f(x)$在点 x 处连续，试问函数 $y=f(x)$在点 x 处是否可微，为什么?

3. 函数 $y=f(x)$在点 x 处可微，是否一定有函数的增量大于函数的微分，即 $\Delta y>dy$?

第四节 导数的应用

本节将利用导数来进一步研究函数的性质和函数曲线的某些性态，并利用这些知识来解决一些实际问题. 下面介绍在微分学中非常重要的中值定理——*Lagrange* 中值定理.

一、*Lagrange* 中值定理

定理 2-5 如果函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，则在开区间(a,b)内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使下面等式成立

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)，(a<\xi<b)$$

或

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}，(a<\xi<b). \tag{2-12}$$

证明从略. 解释一下其几何意义. 图 2-5 中，画出了$[a,b]$上的一条曲线 $y=f(x)$，过端点 $A(a,f(a))$、$B(b,f(b))$做割线，其斜率为 $k_{割}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. *Lagrange* 中值定理说明，如果连续曲线弧$\widehat{AB}$，除端点外，处处存在不垂直于 x 轴的切线，则在这弧$\widehat{AB}$上至少



能找到一点 P，使得曲线在点 P 的切线平行于割线 AB，即它们的斜率相等.

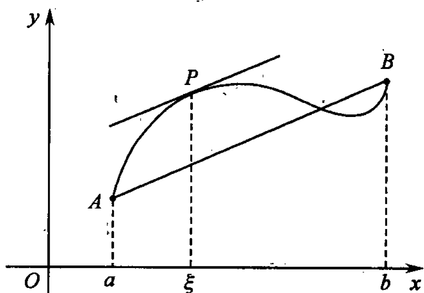


图 2-5

再看物理意义. 若变速直线运动的路程函数 $y=f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，则在时间区间 (a,b) 内至少存在一时刻 ξ，使时刻 ξ 的瞬时速度 $f'(\xi)$ 等于时间 (a,b) 内的平均速度 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

值得注意，*Lagrange* 中值定理中的两个条件，若有一个不满足，则定理的结论就可能不成立. 如图 2-6，(a) 中函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有间断点；(b) 中函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有不可导的点 x_0，则相应的曲线 $f(x)$ 在 (a,b) 内可能找不到一点，使该点的切线平行于割线 AB.

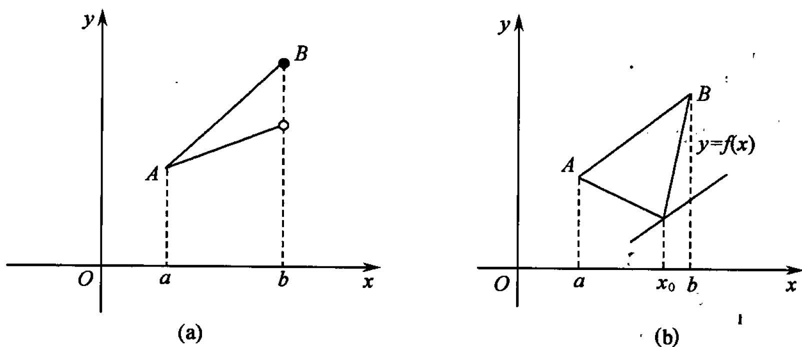


图 2-6

但易知，不满足 *Lagrange* 中值定理的两个条件，也可能有此结论.

Lagrange 中值定理亦称微分中值定理. 它是利用导数的局部性研究函数整体性的重要工具，它是沟通函数与其导数之间的桥梁. 因此，它是微积分学中的重要定理.

推论 1　若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)=0$，则 $f(x)=c$（c 为常数）.

推论 2　若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)=g'(x)$，则 $f(x)=g(x)+c$（c 为常数）.

二、*L'Hospital* 法则

如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$、$g(x)$ 均为无穷小量（或无穷大量），即它们的极限 $\lim f(x)=0$（或 ∞），$\lim g(x)=0$（或 ∞），那么极限 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可能存在，也可能不存在，通常将这种极限叫做不定式（未定式），分别记作 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$，其中约定用 “0” 表示无穷小量，用 “∞” 表示无穷大量. 因此，计算 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的极限都要根据函数的不同类型选用相应的方法，而 *L'Hospital* 法则给了我们更为简便而有效的计算方法.

不定式还有其他几种类型 $0\cdot\infty$、1^{∞}、0^0、∞^0、$\infty-\infty$ 等，其中约定用 “1” 表示为以 1 为极限的函数. 这五种不定式皆可化为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型. 下面介绍 *L'Hospital* 法则.

定理 2-6　如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足下列条件：

（1）当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都趋于 0 或都趋于无穷大；

（2）当 $x\to x_0$ 时，$f'(x)$ 和 $g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或无穷大；

则
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{2-13}$$

以上所述中的 $x\to x_0$ 可换成 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 或 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$ 或 $x\to\infty$.

公式(2-13)说明，在一定条件下，可将两个函数比的极限化为这两个函数导数比的极限，这种求不定式的方法，称为 *L'Hospital* 法则. 当导数比的极限仍是不定式，且满足定理中的条件，则可继续使用 *L'Hospital* 法则，即

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

直到它不再是不定式或不满足定理 2-6 的条件为止.

例 2-39 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

解 这是 $\frac{0}{0}$ 型不定式，由 *L'Hospital* 法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

例 2-40 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\arctan x}{\ln\frac{1+x}{x}}$.

解 这是 $\frac{0}{0}$ 型不定式，由 *L'Hospital* 法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\arctan x}{\ln\frac{1+x}{x}}\overset{\frac{0}{0}\text{型}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{1+x^2}=2.$$

例 2-41 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}(a>0)$.

解 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式，由 *L'Hospital* 法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}\overset{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a}=0.$$

例 2-42 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}$，（$n$ 为正整数，$\lambda>0$）.

解 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式，由 *L'Hospital* 法则，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}{=\!=\!=}\cdots\overset{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0.$$

例 2-43 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^a\ln x(a>0)$.

解　这是 $0\cdot\infty$ 型不定式，将其化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式，由 *L'Hospital* 法则，得

$$\lim_{x\to0^+}x^a\ln x\xlongequal{0\cdot\infty型}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-a}}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}型}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-ax^{-a-1}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x^a}{a}=0.$$

例 2-44　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

解　这是 $\infty-\infty$ 型不定式，将其化为 $\frac{0}{0}$ 型，由 *L'Hospital* 法则，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)\xlongequal{\infty-\infty型}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\xlongequal{\frac{0}{0}型}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

例 2-45　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

解　法 1　这是 ∞^0 型不定式，令 $y=x^{\frac{1}{x}}$，两边取对数，得 $\ln y=\frac{\ln x}{x}$，使 $\ln y$ 的极限为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式，由 *L'Hospital* 法则，得

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}型}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0,$$

于是
$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y}=e^0=1.$$

法 2　这是 ∞^0 型不定式，将其指数化，使其指数部分的极限为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式，再用 *L'Hospital* 法则，得

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}型}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}}=e^0=1.$$

例 2-46　求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$.

解　这是 0^0 型不定式，令 $y=x^x$，两边取对数，得 $\ln y=x\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$，使 $\ln y$ 的极限为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式，由 *L'Hospital* 法则，得

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}型}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to0^+}x=0,$$

于是
$$\lim_{x\to0^+}x^x=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln y}=e^0=1.$$

例 2-47　求 $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

解　这是 1^∞ 型不定式，令 $y=x^{\frac{1}{1-x}}$，两边取对数，得 $\ln y=\frac{\ln x}{1-x}$，使 $\ln y$ 的极限为 $\frac{0}{0}$ 型不定式，由 *L'Hospital* 法则，得

$$\lim_{x\to1}\ln y=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}\xlongequal{\frac{0}{0}型}\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1,$$

于是 $$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\ln y}=e^{-1}.$$

例 2-48 说明下列极限存在，但不能使用 *L'Hospital* 法则

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

解 (1) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$|\sin x|\leqslant1$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，因此，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\cos x)$ 不存在，且不是无穷大，所以它不满足 *L' Hospital* 法则第三条条件，故不能使用 *L' Hospital* 法则，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}\neq\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{x'}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}\text{型}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，出现了循环的情况，无法确定原极限是否存在，故不能使用 *L'Hospital* 法则.

例 2-45、例 2-46、例 2-47 三个极限均为幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的极限，且为不定式极限. 应先令 $y=f(x)^{g(x)}$，两边取对数 $\ln y=g(x)\ln f(x)$，然后求 $g(x)\ln f(x)$ 的极限（此极限为 $0\cdot\infty$ 的极限），即求 $\ln y$ 的极限，从而可求出 $f(x)^{g(x)}=e^{\ln y}$ 的极限. 或者先将此函数指数化 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$，然后再求指数部分 $g(x)\ln f(x)$ 的极限（为 $0\cdot\infty$ 的极限），从而求出 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ 的极限.

从上面例题中看出，*L'Hospital* 法则是计算不定式极限的有力工具，但在具体使用时应注意法则的可用的条件，如例 2-48 中(1)；同时应注意任何法则都不是万能的，如例 2-48 中(2). 另外即使可以用 *L'Hospital*，但有时只用 *L'Hospital* 往往会十分繁琐. 因此，求函数的不定式极限时，应注意与第一章介绍的方法结合使用.

三、函数的单调性和极值

1. 单调性

如果可导函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调递增（单调递减），那么曲线 $y=f(x)$ 上横坐标在 (a,b) 内的每一点都存在切线，且切线斜率 $f'(x)=\tan\alpha\geqslant0(\leqslant0)$，如图 2-7 所示. 由此可见，函数的单调性与导数的符号有着密切关系.

定理 2-7 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$），则函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调递增（或单调递减）.

证明 任取 x_1，$x_2\in(a,b)$，设 $x_1<x_2$，则 $[x_1,x_2]\subset(a,b)$.

因为函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，所以函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上可导，从而 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,x_2]$ 上连续，在开区间 (x_1,x_2) 内可导，由 *Lagrange* 中值定理条件，有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\quad(x_1<\xi<x_2).$$

已知 $f'(\xi)>0$，$x_2-x_1>0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$. 从而函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是单调递增.



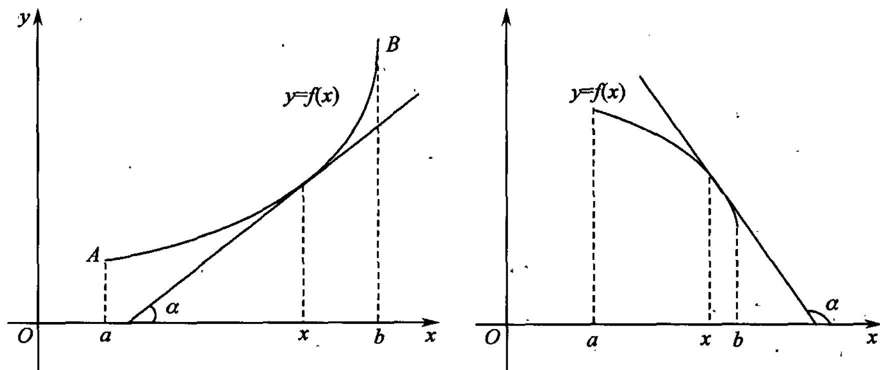


图 2-7

同理可证，当$f'(x)<0$时，$f(x)$在(a,b)上是单调递减.

显然，若将闭区间换成其他区间(包括无穷区间)，有个别点处的导数为零，定理的结论仍然成立.

例 2-49　讨论函数$f(x)=\arctan x-x$的单调性.

解　函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=-\frac{x^2}{1+x^2}.$$

除$x=0$时，$f'(x)=0$外，恒有$f'(x)=-\dfrac{x^2}{1+x^2}<0$. 因此，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是单调递减的.

例 2-50　求函数$f(x)=x^3-6x^2+9x+16$的单调区间.

解　函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3).$$

令$f'(x)=0$，得两个根$x_1=1$，$x_2=3$. 它们将定义域分成三个子区间：$(-\infty,1)$，$(1,3)$，$(3,+\infty)$.

在区间$(-\infty,1)$和$(3,+\infty)$内，$f'(x)>0$，则$f(x)$在该区间内单调递增；在区间$(1,3)$内$f'(x)<0$，则$f(x)$在该区间内单调递减.

$f(-1)=0$，$f(0)=16$，$f(1)=20$，$f(3)=16$. 这样函数$f(x)$的图形大体状况就清楚了，如图 2-8.

值得注意，在不易判别子区间上$f'(x)$的符号时，可求该子区间内某一点x_0的导数$f'(x_0)$的符号，则$f'(x_0)$的符号就是$f'(x)$在该子区间上的符号.

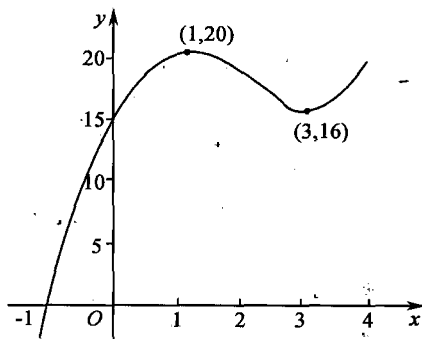


图 2-8

例 2-51　求函数$f(x)=1-\sqrt[3]{(x-2)^2}$的单调区间.

解　函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}},\quad x\neq 2.$$

$x=2$时，$f'(x)$不存在. 在区间$(-\infty,2)$内，$f'(x)>0$，则$f(x)$在该区间内单调递增；在区间$(2,+\infty)$内，$f'(x)<0$，则$f(x)$在该区间内单调递减.

一般地，对于定义区间上的连续函数$f(x)$，除有限个点外导数处处存在，那么导数等于零的点及导数不存在的点就特别值得关注：这些点两侧的导数$f'(x)$符号可能有改变. 因此用这些点将定义区间分成若干个子区间，在每个子区间上导数符号恒定，由其符号判别出每个子区间上函数的单调性.

2. 函数的极值

在例2-50中，函数$f(x)=x^3-6x^2+9x+16$的图形(见图2-8)在$(-\infty,1)$内单调递增，在$(1,3)$内单调减少，在$(3,+\infty)$内单调递增，而点$(1,20)$是曲线上的一个“高峰”，点$(3,16)$为曲线上的“低谷”. 这样的“高峰”和“低谷”，在数学里叫做**极大值(local maximum)**和**极小值(local minimum)**.

定义 2-3 设函数$y=f(x)$在点x_0某邻域内有定义，若对该去心邻域内的任意点x，都有

$$f(x_0)>f(x) \quad (f(x_0)<f(x)),$$

则称$f(x_0)$为函数$f(x)$的一个极大值(极小值)，点x_0称为极大值点(极小值点).

函数的极大值和极小值统称为**极值(extreme value)**，极大值点和极小值点统称为**极值点(extreme point)**. 例2-50中，$f(1)=20$为极大值，$f(3)=16$为极小值，$x=1$为极大值点，$x=3$为极小值点.

极值的概念是局部性的，它是根据点x_0的函数值与其附近一个局部范围内的点的函数值比较而来的. 极大(小)值不一定是整个所讨论区间的最大(小)值. 函数在整个区间上可能有若干个极大值和极小值，极大值可能比极小值还小. 整个区间上的最大(小)值，不一定是极大(小)值，但极大(小)值有可能为最大(小)值，见图2-9.

由图2-9还可看到，在函数取得极值处，若函数在这一点可导，则曲线在该点的切线是水平的，即$f'(x)=0$；但曲线切线是水平的，即$f'(x)=0$，该点又未必取极值，如$f'(x_3)=0$，但$f(x_3)$不是极值.

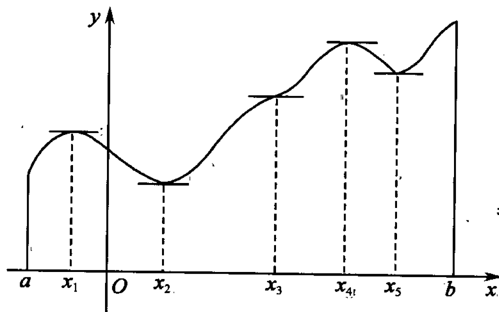


图2-9

定理 2-8 若函数$y=f(x)$在点x_0处可导，且$f(x)$在点x_0处取得极值，则$f'(x_0)=0$.

满足$f'(x)=0$的点，称为函数$y=f(x)$的**驻点**. 显然，可导函数的极值点必是驻点. 但反之，函数的驻点并不一定是极值点.

下面具体讨论判别驻点是否为极值点的方法.

定理 2-9 (第一判别法)设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内可导，且$f'(x_0)=0$，

(1) 若$x<x_0$时，$f'(x)>0$；$x>x_0$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在点x_0处取得极大值；

(2) 若$x<x_0$时，$f'(x)<0$；$x>x_0$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在点x_0处取得极小值；

(3) 若当x在点x_0左右两侧时，$f'(x)$符号恒定，则$f(x)$在点x_0处不取极值.

驻点是否为极值点，由定理2-9，得考察$f'(x)$在x_0点左右两侧邻近点的符号，但有时很麻烦，易错. 下面给出一个比较好用的方法(但注意它也有一定的局限性).

定理 2-10 设函数$f(x)$在x_0点处具有二阶导数，且$f'(x_0)=0$，则

(1) 当$f''(x_0)<0$时，则$f(x)$在点x_0处取得极大值；

(2) 当$f''(x_0)>0$时，则$f(x)$在点x_0处取得极小值；

(3) 当$f''(x_0)=0$时，无法判定$f(x)$在点x_0处是否取得极值.

由定理2-10中的(3)可知，$f'(x_0)=f''(x_0)=0$时，$f(x)$在点x_0处可能取得极值，也



可能不取极值. 例如$f(x)=x^3$，$g(x)=x^4$，$f'(0)=f''(0)=0$，$g'(0)=g''(0)=0$，$f(x)=x^3$在点$x=0$处不取极值，见图2-10；而$g(x)=x^4$在点$x=0$处取极小值，见图2-11. 因此在$f''(x_0)=0$，无法用定理2-10来判别$f(x)$在点x_0处是否取得极值，这时只能用定理2-9来判别.

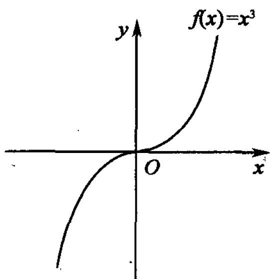


图2-10

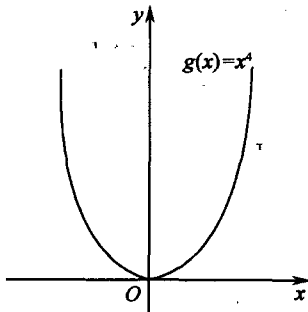


图2-11

另外，函数不可导的点也可能是极值点. 例如，函数$f(x)=|x|$在$x=0$点不可导，显然$x=0$时$f(x)=|x|$取极小值(见图2-2). 函数$f(x)=\sqrt[3]{x}$在$x=0$点不可导，但$x=0$时$f(x)=\sqrt[3]{x}$不取极值.

注意：在定理2-9中，若函数$f(x)$在点x_0处导数不存在，其他条件不变，定理2-9中(1)、(2)、(3)三条法则仍然适用.

函数$f(x)$在某区间的极值点可能是驻点，也可能是导数不存在的点. 将驻点和导数不存在的点，统称为函数的**可能极值点**. 如何来判别可能极值点是否取极值，可按下列步骤进行.

(1) 求函数$f(x)$的定义域及导数；

(2) 求出$y=f(x)$在定义域内的全部可能极值点(驻点及导数不存在的点)；

(3) 由定理2-9或定理2-10分别判别这些点是否为极值点. 若是，求出该点的函数值，即为极值.

例2-52　求函数$f(x)=x-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$的极值.

解　函数$f(x)$的定义域$(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=1-x^{-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}.$$

令$f'(x)=0$，得驻点$x=1$；又知$x=0$时$f'(x)$不存在. 列表讨论：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	取极大值	↘	取极小值	↗

所以$f(x)$有极大值$f(0)=0$，有极小值$f(1)=-\frac{1}{2}$.

例2-53　求函数$f(x)=2x^2-x^4$的极值.

解　函数$f(x)$的定义域$(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=4x-4x^3=4x(1-x^2);$$

令$f'(x)=0$，得驻点$x=0$，$x=-1$，$x=1$.

而
$$f''(x)=4-12x^2=4(1-3x^2),$$
$f''(0)=4>0$，所以$f(x)$在点$x=0$处取极小值$f(0)=0$.

$f''(\pm1)=-8<0$，所以$f(x)$在$x=-1$，$x=1$处均取极大值$f(-1)=f(1)=1$.

3. 最大值、最小值

在医药学中，经常会遇到这样的问题，口服或肌注一定剂量的某种药物后，血药浓度何时达到最高值？在一定条件下，如何使用药物最经济，疗效最佳，毒性最小等问题．这类问题反映到数学上来看，就是所谓的函数的最大值、最小值问题．

由第一章可知，闭区间上的连续函数必存在最大值、最小值．函数的最大值和最小值可能是极值点及端点的函数值．因此，求闭区间连续函数的最大值和最小值时，只需将可能极值点（驻点及导数不存在的点）和端点的函数值（有限多个函数值）求出来，比较它们的大小，最大者为最大值，最小者为最小值．若函数是单调的，则最大值、最小值必在端点处取得，当函数是单调递增（递减）时，左（右）端点取最小值，右（左）端点取最大值．另外，在一个区间上，函数$f(x)$只有一个极值$f(x_0)$，$f(x_0)$若是极大（小）值，则$f(x_0)$在该区间上必是最大（小）值．还有在实际问题中，也往往可以根据问题的具体实际意义，确定目标函数$f(x)$一定有最大值（最小值），而且一定在定义区间内取得，若$f(x)$在定义区间内有唯一的驻点x_0，则$f(x_0)$就一定是最大值（最小值）．

例 2-54 求函数$f(x)=(x+4)\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}$在$[-2,2]$上的最大值、最小值．

解
$$f'(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\frac{2}{3}(x+4)(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{5(x+1)}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$
令
$$f'(x)=0，得驻点 x=-1；x=1 时，f'(x)不存在.$$
$$f(-2)=2\sqrt[3]{9}\approx4.16,\ f(-1)=3\sqrt[3]{4}\approx4.76,\ f(1)=0,\ f(2)=6.$$
比较上述函数值，得$f(x)$的最大值为$f(2)=6$，最小值为$f(1)=0$.

例 2-55 肌内注射或皮下注射药物后，血中的药物浓度可表示为
$$C=\frac{A}{\sigma_2-\sigma_1}(e^{-\sigma_1t}-e^{-\sigma_2t})$$
其中A、σ_1、σ_2是大于零的常数，且$\sigma_2>\sigma_1$，问时间t为何值时，药物浓度为最大，最大浓度是多少？

解 由实际意义可知目标函数C的定义域为$[0,+\infty)$
$$C'=\frac{A}{\sigma_2-\sigma_1}(\sigma_2e^{-\sigma_2t}-\sigma_1e^{-\sigma_1t}).$$
令 $C'=0$，可得 $t=\dfrac{\ln\sigma_2-\ln\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}$，
$$C''=\frac{A}{\sigma_2-\sigma_1}(\sigma_1^2e^{-\sigma_1t}-\sigma_2^2e^{-\sigma_2t})=\frac{A}{\sigma_2-\sigma_1}\sigma_1^2e^{-\sigma_1t}\left[1-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}e^{(\sigma_1-\sigma_2)t}\right]$$
$$C''\left(\frac{\ln\sigma_2-\ln\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)=-A\sigma_1e^{-\frac{\sigma_1(\ln\sigma_2-\ln\sigma_1)}{\sigma_2-\sigma_1}}<0.$$
故 $t=\dfrac{\ln\sigma_2-\ln\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}$时，$C$取极大值为 $C\left(\dfrac{\ln\sigma_2-\ln\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)=\dfrac{A}{\sigma_2}\left(\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{\frac{\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}$.

由于C在$[0,+\infty)$上只有一个极大值点，且$t\to+\infty$时，$C\to0$. 所以 $t=\dfrac{\ln\sigma_2-\ln\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}$时，$C$达到最大值为 $C_{\max}=\dfrac{A}{\sigma_2}\left(\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{\frac{\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}$. 即当时间 $t=\dfrac{\ln\sigma_2-\ln\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}$时，血药浓度为最大，其



最大浓度为$\frac{A}{\sigma_2}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{\frac{\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}}$.

四、函数曲线的凹凸性和拐点

函数的单调性和极值在函数图形的描绘中起着重要的作用，但仅有这些，还不能准确描绘函数的图形. 例如，$y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$内都是单调递增(图 2-12)，但它们单调递增的方式有显著的差异，即函数曲线在沿 x 轴正方向上升的过程中，它们的弯曲方向(曲线的凹凸性)不同。因此研究函数曲线凹凸性及拐点(曲线改变弯曲方向的点)是十分必要的.

定义 2-4 设函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上连续，如果对于$[a,b]$上的任意两点 x_1，x_2，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

或

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称函数 $y=f(x)$是$[a,b]$上的**凹函数**或**凸函数**，亦称曲线 $y=f(x)$在$[a,b]$上是**凹的**(**concave**)或**凸的**(**convex**)，见图 2-13 或图 2-14.

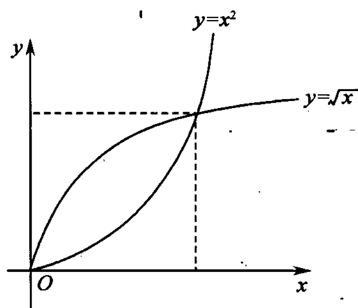


图 2-12

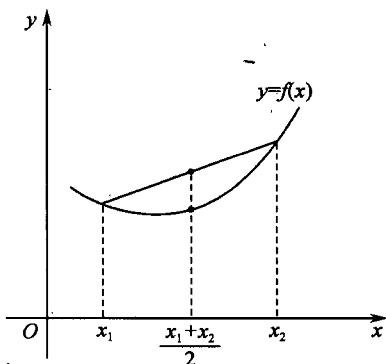


图 2-13

函数曲线在某一区间内的凹凸性与函数在该区间内的导数有着十分密切的关系：

定理 2-11 设函数 $y=f(x)$在(a,b)内具有二阶导数 $f''(x)$，则有

(1) 若对任意 $x\in(a,b)$，有 $f''(x)>0$，则曲线$f(x)$在(a,b)内是凹的；

(2) 若对任意 $x\in(a,b)$，有 $f''(x)<0$，则曲线$f(x)$在(a,b)内是凸的.

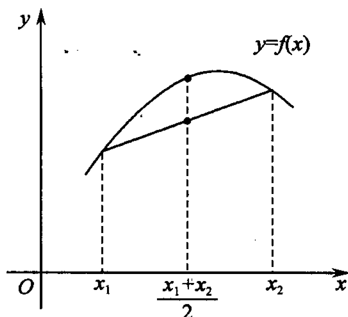


图 2-14

由图 2-13(图 2-14)可见，当曲线$f(x)$在(a,b)内是凹的(或凸的)时，曲线$f(x)$在(a,b)内的点(x,y)，随着 x 的增大，该点切线的斜率也随着 x 的增大而增大(减小)，即导数$f'(x)$是单调递增(单调递减)的，故有$f''(x)>0$($f''(x)<0$).

例 2-56 判别曲线$f(x)=3x-x^3$ 的凹凸性.

解 函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=3-3x^2,\ f''(x)=-6x,$$

显然，在$(-\infty,0)$上，$f''(x)>0$，则曲线$f(x)$在$(-\infty,0)$上是凹的；在$(0,+\infty)$上，$f''(x)<0$，则此曲线$f(x)$在$(0,+\infty)$上是凸的，见图2-15.

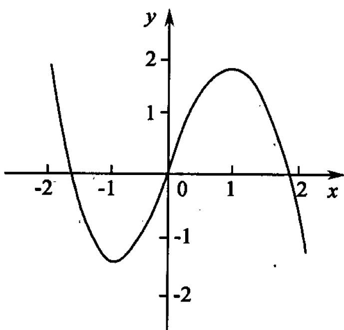


图2-15

由图2-15可见，(0,0)点是曲线上的由凹变凸的分界点，这种曲线凹凸的分界点，称为**拐点**(**inflection point**). 拐点两侧的凹凸性不同，那么$f''(x)$的符号也就不同. 因此，曲线上的拐点(x,y)对应的x点处的二阶导数只能是等于0或不存在. 于是，可按下列步骤判别曲线的凹凸性及拐点：

(1) 求函数$f(x)$的定义域；

(2) 求$f''(x)$，找出在定义域内$f''(x)$等于零的点和$f''(x)$不存在的点，并用这些点将其定义域分成若干个子区间；

(3) 判别$f''(x)$在每个子区间内的符号，从而得出曲线$f(x)$在各个子区间内的凹凸性，同时可确定出上述各点对应的曲线上的点是否为拐点.

例 2-57 讨论曲线$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{10}(x-1)^{\frac{5}{3}}$的凹凸性及拐点.

解 函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$f'(x)=x+\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}},\ f''(x)=1+(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{x-1}+1}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

令$f''(x)=0$，得$x=0$；$x=1$，$f''(x)$不存在. $x=0$，1将定义域分成三个子区间，列表讨论

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	+	0	-	不存在	+
$f(x)$	凹的	取拐点	凸的	取拐点	凹的

所以曲线$f(x)$在区间$(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$上是凹的，在区间$(0,1)$上是凸的，$f(0)=-\frac{9}{10}$，$f(1)=\frac{1}{2}$，所以点$\left(0,-\frac{9}{10}\right)$和$\left(1,\frac{1}{2}\right)$是拐点.

五、函数曲线的渐近线

为了更准确地描绘函数的图形，下面我们研究曲线的渐近线.

定义 2-5 当曲线C上的动点沿着曲线C无限远离原点时，若动点与某一直线L的距离趋于0，则称此直线L为曲线C的**渐近线**(**asymptote**).

曲线的渐近线有三种：垂直渐近线、水平渐近线、斜渐近线.

1. 垂直渐近线

设曲线$y=f(x)$，若极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，或$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，则直线$x=x_0$是曲线$f(x)$的**垂直渐近线**(垂直于$x$轴).

例如，曲线$y=\ln x$，因为$\lim\limits_{x\to 0+}\ln x=-\infty$，则直线$x=0$是曲线$y=\ln x$的垂直渐近线.

2. 水平渐近线

设曲线$y=f(x)$，若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，或$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则直线$y=A$是曲线$f(x)$的**水平渐近线**(平行于$x$轴).



例如，曲线 $y=\arctan x$，因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，则直线 $y=-\frac{\pi}{2}$，$y=\frac{\pi}{2}$ 皆为曲线 $y=\arctan x$ 的水平渐近线.

3．斜渐近线

设曲线 $y=f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$，则直线 $y=ax+b$ 为曲线 $f(x)$ 的**斜渐近线**．其中，$x\to\infty$ 也可换成 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$.

例 2-58　求曲线 $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x}$ 的渐近线.

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+2x-1}{x}=\infty$，所以 $x=0$ 为曲线 $f(x)$ 的垂直渐近线；

又因为

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x}=2,$$

所以 $y=x+2$ 为曲线 $f(x)$ 的斜渐近线.

*六、函数图形的描绘

在医药学研究中，目标函数常常需要以图形的形式出现．函数的图形能够直观地反映函数的各种特性，对函数进行定性分析也是非常有用的．因此，比较真实、准确地描绘函数图形就显得尤为重要.

以前我们是利用描点法去描绘函数的图形．这样函数的一些重要特性：单调性、凹凸性等不易掌握；一些重要的点：极值点、拐点等也极易被忽视．现在，我们已经掌握了应用导数讨论函数的单调性和极值，凹凸性和拐点等方法，从而能比较准确地描绘函数的图形．下面就介绍利用导数描绘函数图形的基本步骤：

（1）求出函数 $y=f(x)$ 的定义域，以确定函数图形的描绘范围；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的基本性质：奇偶性，周期性，以便缩小描绘函数图形的范围，有利于从部分掌握整体；

（3）确定曲线的渐近线；

（4）求函数 $f(x)$ 一阶、二阶导数，并在定义域内找出使其为零的点和不存在的点，并用这些点将定义域分成若干个区间．在每个子区间上讨论 $f(x)$ 的单调性与极值、凹凸性与拐点，并列成一表；

（5）求出函数 $f(x)$ 可能极值点的函数值，从而得到曲线上的相应点的坐标，再求出拐点的坐标以及曲线与坐标轴的交点(不易求时，可略去)的坐标，有时还需要适当补充一些辅助点的坐标；

（6）在直角坐标系中，首先画出渐近线、标明这些关键点，最后按照曲线的性态逐段描绘，便得到函数的图形.

对于奇偶函数只须画出 $x\geqslant0$ 的部分，再对称画出 $x<0$ 的部分；对于周期函数只须画出一个周期的图形，然后再将此图形一个周期一个周期向左右拓展.

例 2-59　描绘函数 $f(x)=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ 的图形.

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=\infty$，

所以 $x=1$ 为曲线 $f(x)$ 的垂直渐近线；

又因为
$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}=1,$$
$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x+1}{(x-1)^2}=5,$$
所以 $y=x+5$ 为 $f(x)$ 的斜渐近线.
$$f'(x)=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3},\ f''(x)=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$$
令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 和 $x=5$；令 $f''(x)=0$，得 $x=-1$. 列表讨论

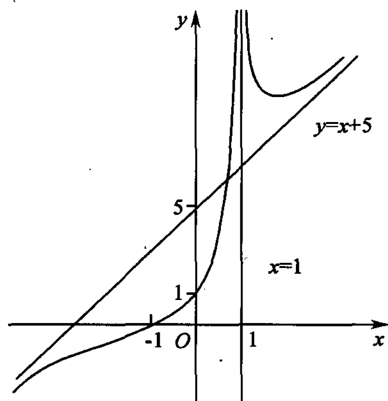


图 2-16

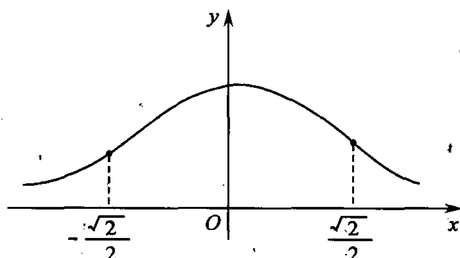


图 2-17

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	−	0	+
$f''(x)$	−	0	+	+	+	+
$f(x)$	↗(凸)	取拐点	↗(凹)	↘(凹)	取极小值	↗(凹)

其中，"↗(凸)"表示单调递增、凸的；"↗(凹)"表示单调递增、凹的；"↘(凹)"表示单调递减、凹的. $f(-1)=0$，$f(5)=\frac{27}{2}$. 补充 $f(0)=1$，$f(3)=16$，得曲线上点 $(-1,0)$，$\left(5,\frac{27}{2}\right)$，$(0,1)$ 和 $(3,16)$.

在直角坐标系中，参照上述信息描绘函数 $f(x)$ 的图形，见图 2-16.

例 2-60 描绘 Gauss 曲线 $f(x)=e^{-x^2}$.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，此函数是偶函数，故曲线 $f(x)$ 关于 y 轴对称.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$，

所以 $y=0$ 为曲线的水平渐近线.
$$f'(x)=-2xe^{-x^2},\ f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$
令 $f'(x)=0$，则 $x=0$；$f''(x)=0$，则 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.



列表讨论(由其对称性,只列出$(0,+\infty)$上的性态):

x	0	$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
$f'(x)$	0	—	—	—
$f''(x)$	—	—	0	+
$f(x)$	取极大值	⌒	取拐点	◟

其中表示"⌒"为单调递减、凸的.

$f(0)=1$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$, 得曲线上两点$(0,1)$和$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

在直角坐标系中，参照上述信息，描绘函数$f(x)=e^{-x^2}$的图形，见图2-17.

例 2-61　1970年，page在实验室饲养雌性小鼠，通过收集的大量资料分析，得小鼠生长函数为

$$W=\frac{36}{1+30e^{-\frac{2}{3}t}}$$

其中W为重量，t为时间，试描绘小鼠生长函数的曲线.

解　W的定义域为$[0,+\infty)$.

因为$\lim\limits_{t\to+\infty}W=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{36}{1+30e^{-\frac{2}{3}t}}=36$，所以$W=36$为水平渐近线.

$$W'=\frac{720e^{-\frac{2}{3}t}}{(1+30e^{-\frac{2}{3}t})^2},\quad W''=\frac{480\,(30e^{-\frac{2}{3}t}-1)e^{-\frac{2}{3}t}}{(1+30e^{-\frac{2}{3}t})^3},$$

$W'>0$，令$W''=0$，得$t=\frac{3\ln30}{2}$，列表讨论

t	$\left[0,\frac{3\ln30}{2}\right)$	$\frac{3\ln30}{2}$	$\left(\frac{3\ln30}{2},+\infty\right)$
W'	+	+	+
W''	+	0	-
W	◡	取拐点	◜

$W(0)=\frac{36}{31}$，$W\left(\frac{3\ln30}{2}\right)=18$，得曲线上点$\left(0,\frac{36}{31}\right)$和$\left(\frac{3\ln30}{2},18\right)$.

在直角坐标系中，参照上述信息，描绘小鼠的生长曲线，见图2-18.

此曲线符合logistic生长曲线. 由图形可看出，小鼠开始时增长缓慢，然后较快，最后又变缓慢，而在拐点处附近生长最快.

logistic曲线在许多医学研究领域中有着广泛的应用，如人口增长阻滞、儿童生长发育等生物自然生长的研究，在SARS、艾滋病等流行

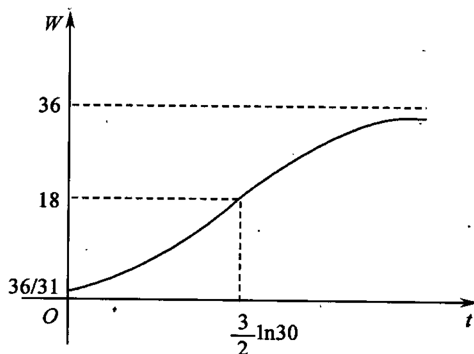


图 2-18

病的研究等等。

【思考与练习】

1. 在中值定理中，当$f(a)=f(b)$时，将会有怎样的结论？并从几何上加以说明.

2. 选择题

(1) 函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$a<x_1<x_2<b$，则至少存在一点ξ，有(　　)

A. $f(b)-f(a)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，$\xi\in(x_1,x_2)$；　B. $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，$\xi\in(a,b)$；

C. $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$\xi\in(x_1,x_2)$；　D. $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(b-a)$，$\xi\in(x_1,x_2)$.

(2) 下列计算正确的是(　　)

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\arctan x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0$；

B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+\cos x)'}{(1-\cos x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\sin x}{\sin x}=-1$；

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$，极限不存在；

D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，又$|\cos x|\leqslant 1$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cos x\right)=0$.

3. 指出下列命题是否正确，若有错误，错误何在?

(1) 函数$y=f(x)$在区间(a,b)内可导，且单调递增，则在区间(a,b)内处处有$f'(x)>0$；

(2) 函数$f(x)$，$g(x)$在区间(a,b)内均可导，且$f(x)<g(x)$，则在区间(a,b)内有$f'(x)<g'(x)$；

(3) 函数$y=f(x)$在$x=x_0$点取极值，则一定有$f'(x_0)=0$；

(4) 函数$y=f(x)$在$x=x_0$点有$f'(x_0)=0$，则$y=f(x)$一定在$x=x_0$点取极值.

4. 试确定a的取值范围，使函数$f(x)=\dfrac{x^2+ax-2}{x-1}$存在极值.

5. 函数$y=f(x)$在x_0点的某邻域内具有三阶连续导数，如果$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，试问

(1) 点$x=x_0$是否为极值点？为什么?　　(2) 点$(x_0,f(x_0))$是否为拐点？为什么?

习　题　二

1. 设某种细菌繁殖的数量N可近似表示为$N=1000+52t+t^2$，其中时间t以小时(h)计，试计算从$t=2$到$t=2+\Delta t$之间的平均繁殖速率，并计算当$\Delta t=0.1$，$\Delta t=0.01$时的平均繁殖速率，再计算$t=2$时的瞬时繁殖速率.

2. 按导数定义计算下列函数在指定点的导数.

(1) $f(x)=\sin 2x$，在$x=0$点；　(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，在$x(x\neq -1)$点；

(3) $f(x)=\sqrt{x+1}$，在$x=0$点；　(4) $f(x)=2x-x^2$，在x点.

3. 设$f(x)$在$x=x_0$点处可导，试计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；　(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$；　(4) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+\alpha t)-f(x_0+\beta t)}{t}$.

4. 设函数$f(x)$在$x=0$点的某邻域内可导，$f(0)=0$，$f'(0)=\dfrac{1}{2}$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}$.



5. 讨论下列函数在 $x=0$ 点是否可导

（1）$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}\sin\dfrac{1}{x} & x<0 \\ 0 & x\geqslant 0 \end{cases}$；　　（2）$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

6. 试确定 a，b 的值，使 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处可导.

*7. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f(x_0)\neq 0$，试计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)}{f(x_0)}\right]^n$（提示：化成指数函数，再用导数定义）.

8. 设曲线 $y=2x-x^3$

（1）求点(1,1)处的切线方程及法线方程；

（2）点 (x_0,y_0) 处的切线通过(0，-2)点，求点 (x_0,y_0) 及该点处的切线方程、法线方程.

9. 设曲线 $y=x^3$

（1）求曲线上点 P，使 P 点处的切线与直线 $y=3x-2$ 平行；

（2）求曲线上点 Q，使 Q 点处的切线与直线 $x+12y-6=0$ 垂直.

10. 已知曲线 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+d$ 与直线 $y=11x-5$ 在点(1,6)处相切，经过(-1,8)，且在点(0,3)处切线平行于 x 轴，求常数 a、b、c、d 之值，并写出此曲线方程.

11. 求下列函数的导数

（1）$y=x^a+a^x+a^a$；　　（2）$y=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{x}$；

（3）$y=x\sin x+\cos x$；　　（4）$y=x\tan x\ln x$；

（5）$y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$；　　（6）$y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$；

（7）$y=\sqrt{x}\arctan x+\dfrac{\sin x}{x}$；　　（8）$y=x\tan x+\dfrac{x}{4^x}+\dfrac{x}{\cos x}$.

12. 求下列函数的导数

（1）$y=(2x^2+3)^3$；　　（2）$y=\ln(\cot x)$；

（3）$y=e^{\sin x}+\arccos\sqrt{1-x^2}$；　　（4）$y=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\dfrac{x}{a}(a>0)$；

（5）$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$；　　（6）$y=\sin(\ln x)+\ln(\cos x)$；

（7）$y=\log_2(x^2-\sin x)$；　　（8）$y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x+\sin\dfrac{\pi}{5}$.

13. 求下列函数的导数

（1）$y=x^{\ln x}$；　　（2）$y=x^{\sin x}$；

（3）$y=(\sin x)^{\cos x}$；　　（4）$y=(2x)^{\sqrt{x}}$；

（5）$y=x^{2x}+(2x)^x$；　　（6）$y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^3+1)}{(x-1)^2}}$；

（7）$y=\dfrac{(x-2)^3\sqrt{x-5}}{\sqrt[3]{x+1}}$；　　（8）$y=\sqrt{(x\sin x)\sqrt{1-e^x}}$.

14. 求由下列方程确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数

(1) $y=1+xe^y$；　(2) $y=\tan(x+y)$；

(3) $x^y=y^x$；　(4) $xy=\ln(x+y)$.

*15. 试证明曲线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$上任一点处的切线，截两个坐标轴的截距之和为 a.

16. 求下列函数的二阶导数

(1) $y=x\ln x$；　(2) $y=(4+x^2)\arctan\frac{x}{2}$；

(3) $y=x^x$；　(4) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$.

17. 设$f''(x)$存在，求下列函数的二阶导数

(1) $y=f(x+e^{-x})$；　(2) $y=\ln[f(x)]$.

18. 求下列函数的 n 阶导数

(1) $y=\ln(1+x)$；　(2) $y=\sin^2 x$.

19. 一质点作直线运动，其运动规律为 $s=\sqrt{t}$，其中，路程 s 的单位为米，时间 t 的单位为秒，求质点在第 4 秒末的速度与加速度？

20. 许多肿瘤的生长规律为 $v=v_0e^{\frac{A}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})}$，其中，$v$ 表示 t 时刻的肿瘤的大小（体积或重量），v_0 为开始（$t=0$）观察时肿瘤的大小，α 和 A 为正常数. 问肿瘤 t 时刻的增长速度是多少？

21. 病人服药后，药物通过肾脏排泄的血药浓度 c 和时间 t 的关系为 $c(t)=c_0(1-e^{-kt})$，c_0 为血药初始浓度，k 为常数，求药物的排泄速率.

22. 求下列参数方程所确定的函数的导数

(1) $\begin{cases}x=e^t\sin t\\y=e^t\cos t\end{cases}$，求$\frac{dy}{dx}$；　(2) $\begin{cases}x=\sqrt{1+t^2}\\y=\arctan t\end{cases}$，求$\frac{dy}{dx}$；

(3) $\begin{cases}x=\sin t\\y=\cos 2t\end{cases}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$；　(4) $\begin{cases}x=2e^t\\y=3e^{-t}\end{cases}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

23. 求下列函数的微分

(1) $y=x^2+1-\sqrt[3]{1+x^2}$；　(2) $y=\sqrt{x}(1+\sin^2 x)$；

(3) $y=\arctan e^x+\ln(1+x^2)$；　(4) $y=\ln\arctan\frac{1}{x}$；

(5) $y=x^2-x$，在 $x=1$ 处；　(6) $y=\sqrt{x+1}$，在 $x=0$，$\Delta x=0.01$ 时.

24. 在下列括号中，填入适当的函数

(1) d(　　) $=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$；　(2) d(　　) $=\frac{1}{x^2}dx$；

(3) d(　　) $=a dx$；　(4) d(　　) $=e^{\alpha x}dx$；

(5) d(　　) $=\sin(\omega t+\varphi)dt$；　(6) d(　　) $=\frac{1}{4+x^2}dx$；

(7) d(　　) $=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　(8) d(　　) $=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx$.

25. 利用微分求近似值

(1) $\tan 46°$；　(2) $\sqrt[5]{34}$.

26. 利用 *L'Hospital* 法则求下列函数极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}x^2\ln x$；　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{2\cos x}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$；

*(9) 设函数$f(x)$存在二阶导数，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=2$，试求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$(提示:用 *L'Hospital* 法则及导数定义)；

*(10) 设函数$f(x)$具有二阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，求$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

27. 试确定下列函数的单调区间

(1) $f(x)=2x^2-12x+5$；　　(2) $f(x)=2x^2-\ln x$；

(3) $f(x)=xe^{-x}$；　　(4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$.

28. 求下列函数的极值

(1) $f(x)=3x-x^3$；　　(2) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$；

(3) $f(x)=\dfrac{6x}{x^2+1}$；　　(4) $f(x)=(2x-1)\cdot\sqrt[3]{(x-3)^2}$.

29. 试问 a 为何值时，函数$f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$，在$x=\dfrac{\pi}{3}$处具有极值？它是极大值，还是极小值？并求此极值.

30. 求下列函数的最大值、最小值

(1) $y=x^2e^{-x}$，在区间$[-1,3]$；　　(2) $y=x^2-\dfrac{54}{x}$，在区间$(-\infty,0)$.

31. 测量某个量 A，由于仪器的精度和测量的技术等原因，对量 A 进行 n 次测量，其测量的资料分别为 x_1，x_2，…，x_n，取数 x 为量 A 的近似值，问 x 取何值时，才能使其与$x_i(i=1,2,\cdots,n)$之差的平方和最小？

32. 1～9 个月婴儿体重 $W(g)$的增长与月龄 t 的关系有经验公式

$$\ln W-\ln(341.5-W)=k(t-1.66)$$

问 t 为何值时，婴儿的体重增长率 v 最快？

33. 已知口服一定剂量的某种药物后，其血药浓度 c 与时间 t 的关系可表示为 $c=40(e^{-0.2t}-e^{-2.3t})$，问 t 为何值时，血药浓度最高，并求其最高浓度.

34. 在磺胺药物动物实验中，按 1(mg/kg)的比率给小鼠注射磺胺药物后，小鼠血液中磺胺药物的浓度，可由方程 $y=-0.77x^2+2.59x-1.06$ 表示，这里 y 表示$\log_{10}c$(c 为血中磺胺浓度 mg/100ml)，x 表示$\log_{10}t$(t 为注射后经历的时间 min)，问何时小鼠血中磺胺浓度最高，并求其最高浓度值.

35. 已知半径为 R 的圆内接矩形，问长和宽为多少时矩形的面积最大？

36. 在研究阈值水平时电容放电对神经的刺激关系中，Hoorweg 发现引起最小的反应(肌肉的收缩)时，电压 U 与电容器的电容量 c 有关，其经验公式为 $U=aR+\dfrac{b}{c}$，其中 R 是电阻(假设为定值)，a、b 为正常数. 若电容的单位为微法(μF)，电容器的电压为伏特

(V)，由物理知识可知，与负荷相对应的电能为 $E=5cU^2$ [尔格(erg)]，从而有 $E=5c\left(aR+\frac{b}{c}\right)^2$. 试问，当电容为多少微法时，电能最小，其最小电能为多少？

37. 判别下列曲线的凹凸性

(1) $y=x\arctan x$； (2) $y=\ln(x^2-1)$.

38. 求下列曲线的凹凸区间与拐点

(1) $y=3x^4-4x^3+1$； (2) $y=\ln(1+x^2)$；

(3) $y=\frac{x^3}{x^2+3}$； (4) $y=(x-5)^{\frac{5}{3}}+2x+1$.

*39. 已知曲线 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 在 $x=-2$ 点处有极值 44，$(1,-10)$ 为曲线 $y=f(x)$ 上的拐点，求常数 a、b、c、d 之值，并写出此曲线方程(提示：拐点为曲线上的点).

40. 求下列曲线渐近线

(1) $y=\frac{1}{x^2-4x-5}$； (2) $y=\frac{x^2+2x-1}{x}$；

(3) $y=\frac{x^2}{x^2-1}$； (4) $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$.

41. 描绘下列函数的图形

(1) $y=x^3-x^2-x+1$； (2) $y=1+\frac{2x}{(x-1)^2}$；

(3) $y=\frac{\ln x}{x}$； (4) $y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$.

42. 某地沙眼的患病率(y)与年龄(t,岁)的关系可表示为

$$y=2.27(e^{-0.050t}-e^{-0.072t})$$

试描绘沙眼患病率函数的曲线，并简述沙眼患病率的变化趋势.

第三章　一元函数积分学

一元函数积分学涉及三种积分：不定积分、定积分和广义积分．这三种积分含义不同，但它们之间有密切联系．

第一节　不定积分

微分学中讨论了如何求函数的导数，现讨论其相反的情形：由一个函数的已知导数去求该函数．例如，设某物体的运动速度 $v(t)=s'(t)=gt$（g 为常数），$t\in[0,T]$，则不难得出 $\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=gt$，于是 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 就是所要求的运动方程之一；又对于任意常数 C，$\left(\frac{1}{2}gt^2+C\right)'=gt$，所以 $s(t)$ 的一般表达式应为 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2+C$. 由 $s'(t)=gt$ 求 $s(t)$，这类问题就是不定积分问题．

一、不定积分的概念

定义 3-1　若在某区间上 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在该区间上的一个**原函数**（**primitive function**）.

例如，$\sin x$ 是 $\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数．$\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的一个原函数．

对于一个给定的函数 $f(x)$，假如它有一个原函数 $F(x)$，那么它便有无穷多个原函数．因为对任意常数 C，都有

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x).$$

这表明 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数．

同时，$F(x)+C$ 已将 $f(x)$ 的一切原函数包罗无遗．因为若 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的原函数，则

$$[G(x)-F(x)]'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

由 Lagrange 中值定理的推论可知：导数恒为零的函数必为常数，因此

$$G(x)-F(x)=C\,(C\text{ 为常数}).$$

即 $G(x)$ 也应具有 $F(x)+C$ 的形式．

定义 3-2　函数 $f(x)$ 的全体原函数称为 $f(x)$ 的**不定积分**（**indefinite integral**），又称为 $f(x)$ 的原函数族，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$. 其中 "$\int$" 为积分号，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，x 为积分变量．

如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的某一原函数，由定义有 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，其中 C 为积分常数．

由此可知，求 $f(x)$ 的不定积分只需求出 $f(x)$ 的一个原函数，再加上任意常数 C.

例如，

$$\int gt\mathrm{d}t=\frac{1}{2}gt^2+C,$$

$$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C,$$

$$\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C.$$

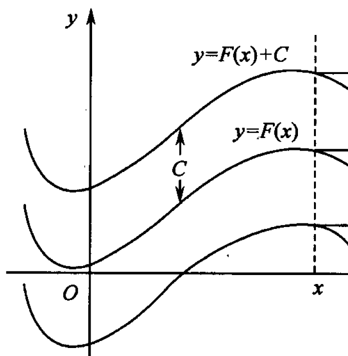


图 3-1

不定积分的几何意义 求函数 $f(x)$ 的不定积分，从几何的观点来看，就是要找出所有这样的曲线，它们在横坐标为 x 的点处切线的斜率等于 $f(x)$．如果 $y=F(x)$ 是这些曲线之一，它即称为 $f(x)$ 的一条积分曲线．将这条曲线沿着 y 轴作上、下平行移动，便可以得到一族积分曲线 $y=F(x)+C$（图 3-1）．

例 3-1 求经过点(1,3)，且其切线的斜率为 $3x^2$ 的曲线方程．

解 因为 $(x^3)'=3x^2$

所以由
$$\int 3x^2\mathrm{d}x=x^3+C$$
得曲线族
$$y=x^3+C.$$
将 $x=1$，$y=3$ 代入，得 $C=2$. 故所求曲线为
$$y=x^3+2.$$

二、不定积分的性质和基本积分公式

根据不定积分的定义，有

性质 3-1 $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$.

性质 3-2 $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$.

例如 $\left(\int e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)'=e^{-x^2}$，而 $\int (e^{-x^2})'\mathrm{d}x=e^{-x^2}+C$.

上述两个性质清楚地表明，求不定积分与求导(或微分)互为逆运算．因此，有一个导数公式，就相应地有一个积分公式．例如，从 $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'=x^\alpha$ $(\alpha\neq-1)$，便有，$\int x^\alpha\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$．于是有基本积分公式如下：

(1) $\int x^\alpha\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ $(\alpha\neq-1)$

(2) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$ $(x\neq0)$

(3) $\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$

(4) $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$

(5) $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

(6) $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

(7) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$

(8) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$

(9) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x+C=-\operatorname{arccot} x+C$

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C=-\arccos x+C$



检验积分结果是否正确，只要对结果求导，若其导数等于被积函数则正确．如

例 3-2　验证 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$.

证　$\because$ 当 $x>0$ 时，$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$;

当 $x<0$ 时，$(\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{(-x)}(-x)' = \frac{1}{x}$.

$\therefore \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$.

性质 3-3　$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$（$k$ 为非零常数）.

性质 3-4　$\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

上述两个性质都很容易由相应的求导法则推导出来．

例 3-3　求 $\int \left(3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right)\mathrm{d}x$.

解　$\int \left(3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right)\mathrm{d}x = 3\int x^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x = x^3 - \sqrt{x} + x + C$.

注意：此处只需写一个积分常数 C.

例 3-4　求（1）$\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$；（2）$\int \tan^2 x\mathrm{d}x$；（3）$\int \sqrt{x}(x^2-5)\,\mathrm{d}x$；（4）$\int e^x(3+2^x)\,\mathrm{d}x$.

解　（1）$\int \frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$;

（2）$\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \tan x - x + C$;

（3）$\int \sqrt{x}(x^2-5)\,\mathrm{d}x = \int (x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}x = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$;

（4）$\int e^x(3+2^x)\,\mathrm{d}x = 3\int e^x\mathrm{d}x + \int (2e)^x\mathrm{d}x = 3e^x + \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = 3e^x + \frac{2^x e^x}{\ln 2 + 1} + C$.

从以上的例子看到，直接利用基本积分公式及不定积分的运算性质（有时要先将被积函数作代数或三角恒等变换），可以求出一些简单的不定积分，这种积分方法称为直接积分法．但对于 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$、$\int e^x\sin x\mathrm{d}x$ 等，不能使用直接积分法．因此，必须进一步研究积分方法．

三、换元积分法

1．第一换元积分法（凑微分法）

引例：$\int e^{2x}\mathrm{d}x = e^{2x} + C$ 是否成立？

解决方法：利用复合函数，设置中间变量．令 $u=2x$，则 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}u$，

$$\int e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

换元积分法（integration by substitution）　是将复合函数求导法则反过来使用的积分法．

定理 3-1　设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$，$u=\varphi(x)$ 可导，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)} = F[\varphi(x)] + C. \qquad (3\text{-}1)$$

证 由假设 $F'(u)=f(u)$，应用复合函数求导法则，得

$$\frac{d}{dx}F[\varphi(x)]=F'(u)\varphi'(x)=f(u)\varphi'(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

故(3-1)式成立.

第一换元积分法的关键，是通过引入中间变量 $u=\varphi(x)$，把被积表达式凑成某个函数的微分，然后利用基本积分公式求出结果，故又称凑微分法.

例 3-5 求(1) $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$ $(a>0)$； (2) $\int\tan x dx$.

解 (1) $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\xlongequal{\frac{x}{a}=u}\frac{1}{a}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{a}\arctan u+C=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$；

(2) $\int\tan x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}\xlongequal{\cos x=u}-\int\frac{du}{u}$

$=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C.$

对换元积分比较熟练后，可不必写出中间变量 u.

例 3-6 求 $\int\sqrt{x+a}dx$.

解 $\int\sqrt{x+a}dx=\int(x+a)^{\frac{1}{2}}d(x+a)=\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}+C.$

例 3-7 求 $\int\frac{dx}{a^2-x^2}$ $(a>0)$.

解 $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)dx=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{d(a+x)}{a+x}-\int\frac{d(a-x)}{a-x}\right]$

$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C.$

例 3-8 求 $\int\sec x dx$.

解 $\int\sec x dx=\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x dx}{\cos^2x}=\int\frac{d\sin x}{1-\sin^2x}\xlongequal{\text{由例 3-7}}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2x}\right|+C=\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+C$

$=\ln|\sec x+\tan x|+C.$

同理 $$\int\csc x dx=\ln|\csc x-\cot x|+C.$$

当被积函数是三角函数相乘时，可拆开奇次项去凑微分：

例 3-9 $\int\sin^2x\cos^3x dx=\int\sin^2x\cos^2x d\sin x=\int\sin^2x(1-\sin^2x)d\sin x$

$=\frac{1}{3}\sin^3x-\frac{1}{5}\sin^5x+C.$

被积函数为三角函数的偶次幂，一般应先降幂(利用倍角公式)：

例 3-10 $\int\sin^2x dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C.$

两个不同角的三角函数相乘，可利用积化和差公式：

例 3-11 $\int\sin 6x\cos 2x dx=\int\frac{\sin 8x+\sin 4x}{2}dx=-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{8}\cos 4x+C.$

同一积分，可以有几种不同的解法，其结果在形式上可能不同，但实质上它们只是相差一个常数．如



例 3-12 求 $\int \sin x\cos x\mathrm{d}x$.

解法 1 $\int \sin x\cos x\mathrm{d}x = \int \sin x\mathrm{d}(\sin x) = \dfrac{\sin^2 x}{2} + C$;

解法 2、$\int \sin x\cos x\mathrm{d}x = -\int \cos x\mathrm{d}(\cos x) = -\dfrac{\cos^2 x}{2} + C$;

解法 3 $\int \sin x\cos x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int \sin 2x\mathrm{d}x = -\dfrac{\cos 2x}{4} + C$.

凑微分常见的类型：

(1) $\int f(x^{n+1})x^n\mathrm{d}x = \int \dfrac{f(x^{n+1})\mathrm{d}(x^{n+1})}{n+1}$

(2) $\int \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$

(3) $\int \dfrac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$

(4) $\int \dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\mathrm{d}x = -\int f\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(5) $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x$

(6) $\int f(e^x)e^x\mathrm{d}x = \int f(e^x)\mathrm{d}e^x$

(7) $\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}\tan x$

(8) $\int \dfrac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$

2. 第二换元积分法

第一换元法令 $u=\varphi(x)$，而第二换元法选择 $u=\varphi(x)$ 的反函数 $x=\psi(u)$ 进行换元，目的是去掉根号或将被积函数化为基本积分公式中的某个形式，这里要求 $x=\psi(u)$ 单调可微且 $\psi'(u)\neq 0$.

例 3-13 求 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$.

解 令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，所以

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{t\mathrm{d}t}{1+t} = 2\int \frac{(1+t)-1}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int \mathrm{d}t - 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = 2t - 2\ln|1+t| + C$$

$$= 2[\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})] + C.$$

例 3-14 求 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

解 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} \overset{\sqrt[6]{x}=t}{=\!=} \int \frac{6t^5}{(1+t^2)t^3}\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 6\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 6(t - \arctan t) + C = 6(\sqrt[6]{x} - \arctan\sqrt[6]{x}) + C.$$

若被积函数含有根式 $\sqrt{a^2-x^2}$、$\sqrt{x^2-a^2}$、$\sqrt{x^2+a^2}$，可分别令 $x=a\sin t$、$x=a\sec t$、$x=a\tan t$ 进行代换化去根式，这种方法称为**三角代换法**. 如：

例 3-15 求不定积分 $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解 作三角替换 $x=a\sin t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$，$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \int a^2\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C$$

$$= \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C.$$

为便于把上式右端换回为 x 的函数，根据换元关系式 $x=a\sin t$，即 $\sin t=\frac{x}{a}$，可作如图 3-2 所示的直角三角形，由图 3-2 可得 $\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$，所以

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

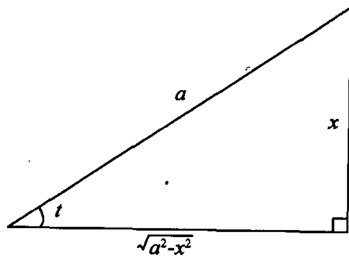


图 3-2

例 3-16 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \xlongequal{x=a\tan t} \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t = \int \sec t\mathrm{d}t \xlongequal{\text{由例 3-8}} \ln|\sec t+\tan t|+C_1$

$$\xlongequal{(*)} \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

其中（*）由 $\tan t=\frac{x}{a}$ 作辅助三角形（与图 3-2 类似），得 $\sec t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$.

例 3-17 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} \xlongequal{x=a\sec t} \int \frac{a\sec t\cdot\tan t}{a\tan t}\mathrm{d}t = \int \sec t\mathrm{d}t = \ln|\sec t+\tan t|+C_1$

$$\xlongequal{(**)} \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

其中（**）由 $\sec t=\frac{x}{a}$ 作辅助三角形（与图 3-2 类似），得 $\tan t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$.

要根据被积函数的具体情况，选取简便的代换，对 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 用第一换元法较简单，而 $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$ 却要用三角代换，对形如 $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x$、$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2\pm x^2}}$、$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2\pm x^2}}$、$\int \frac{\sqrt{a^2\pm x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$ 的积分采用倒代换 $\left(x=\frac{1}{u}\right)$ 更为方便，如

例 3-18 求 $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{1}{u}} \int \frac{\sqrt{a^2-\frac{1}{u^2}}}{\frac{1}{u^4}}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) = -\int (a^2u^2-1)^{\frac{1}{2}}u\mathrm{d}u = -\frac{(a^2u^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C$

$$= -\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C.$$

例 3-19 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.



解 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \arccos\frac{1}{x} + C.$

四、分部积分法

设 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 均是可微函数，由乘积的求导法则 $(uv)'=uv'+u'v$，有

$$uv'=(uv)'-u'v.$$

对等式两边求不定积分，得到

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx \text{ 或 } \int udv = uv - \int vdu.$$

这就是**分部积分**(**integration by parts**)公式，能使不便求的 $\int udv$ 转变为比较易求的 $\int vdu$ 来计算.

例 3-20　求不定积分 $\int \ln x dx$.

解　令 $u=\ln x$，$dv=dx$，则有

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x d\ln x = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

例 3-21　求 $\int x\cos x dx$.

解　令 $u=x$，$dv=\cos x dx$，则

$$\int x\cos x dx = \int x d\sin x = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

为简单起见，以后我们不再标明 u、v 的取法，而直接运用分部积分公式.

例 3-22　求 $\int e^x \sin x dx$.

解

$$\begin{aligned}\int e^x\sin x dx &= \int \sin x de^x = e^x\sin x - \int e^x d\sin x = e^x \sin x - \int e^x\cos x dx \\ &= e^x\sin x - \int \cos x de^x = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x \sin x dx.\end{aligned}$$

把右端末项移到左端，再两端同除以 2，有

$$\int e^x\sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

上式右端已不含积分项，故加上了任意常数 C.

例 3-23　求 $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

解　设 $u=\sqrt{x}$，则

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \ln u du = 2\left(u\ln u - \int du\right) = 2u(\ln u - 1) + C = 2\sqrt{x}(\ln\sqrt{x} - 1) + C.$$

在例 3-23 中同时使用了换元和分部积分法.

下面列出部分适用分部积分法求不定积分的被积函数类型及 u 和 dv 的选取法：

类型 Ⅰ：$\int P(x)e^{ax}dx$　　$u=P(x)$，$dv=e^{ax}dx$　（$P(x)$ 为 x 的多项式）

$\int P(x)\sin x dx$　　$u=P(x)$，$dv=\sin x dx$

$\int P(x)\cos x dx$　　$u=P(x)$，$dv=\cos x dx$

类型Ⅱ：$\int P(x)\ln x\mathrm{d}x$　　$u=\ln x$，$\mathrm{d}v=P(x)\mathrm{d}x$

$\int P(x)\arcsin x\mathrm{d}x$　　$u=\arcsin x$，$\mathrm{d}v=P(x)\mathrm{d}x$

$\int P(x)\arctan x\mathrm{d}x$　　$u=\arctan x$，$\mathrm{d}v=P(x)\mathrm{d}x$

类型Ⅲ：$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$　　u、$\mathrm{d}v$ 任意选取

$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$　　u、$\mathrm{d}v$ 任意选取

五、有理函数的积分

有理函数是指两个多项式的商表示的函数：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$$

其中 m、n 都是非负整数；a_n、a_{n-1}、…、a_1、a_0 及 b_m、b_{m-1}、…、b_1、b_0 都是实数，并且 $a_n\neq0$，$b_m\neq0$.

假定分子与分母之间没有公因式，当 $n<m$ 时，称为真分式；当 $n\geq m$ 时，称为假分式．利用多项式除法，假分式可以化成一个多项式和一个真分式之和．

例

$$\frac{x^3+4x+1}{x^2+1}=x+\frac{3x+1}{x^2+1}.$$

多项式可以逐项直接积分，因此只需要讨论真分式的积分．现在问题在于如何将真分式化为部分分式之和，这里要求分解后各项部分分式的分母仅为一次因式的若干次幂或二次质因式的若干次幂．

真分式化为部分分式之和的一般规律：

（1）分母中若有因式 $(x-a)^k$，可分解为便于直接积分的形式：

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a}，\text{其中 } A_1、A_2、\cdots、A_k \text{ 为待定常数}.$$

（2）分母中若有因式 $(x^2+px+q)^k$，其中 $p^2-4q<0$，则分解为：

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q},$$

其中 M_i、N_i 为待定常数（$i=1$、2、…、k）.

例 3-24　求 $\int\frac{2x-1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$.

分析：被积函数的分母 x^2-5x+6 在实数范围内可以因式分解．

解　设 $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$，确定系数 A、B 有两种方法：

方法 1：去分母，两端同乘以 $(x-3)(x-2)$，得

$$2x-1=A(x-2)+B(x-3)=(A+B)x-(2A+3B).$$

比较两端 x 同次幂的系数，得

$$\begin{cases}A+B=2\\2A+3B=1\end{cases}$$

解方程组，得 $A=5$，$B=-3$.

方法 2：在恒等式 $2x-1=A(x-2)+B(x-3)$ 中，令 $x=3$，得 $A=5$；令 $x=2$，得 $B=-3$.



因此
$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}$$
$$\int\frac{2x-1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x=5\ln|x-3|-3\ln|x-2|+C.$$

例 3-25　求 $\int\frac{2x+1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

解　设 $\frac{2x+1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$,
$$2x+1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1).$$
令 $x=0$，得 $A=1$；令 $x=1$，得 $B=3$；令 $x=2$，得 $5=A+2B+2C$，所以 $C=-1$.

于是
$$\frac{2x+1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$
$$\int\frac{2x+1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{x}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}\right]\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{3}{x-1}-\ln|x-1|+C.$$

例 3-26　求 $\int\frac{x^2+2x-7}{(x-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

解　设 $\frac{x^2+2x-7}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$,
$$x^2+2x-7=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1).$$
令 $x=1$，得 $A=-2$；令 $x=0$，得 $-7=A-C$，所以 $C=5$；令 $x=2$，得 $1=5A+2B+C$，所以 $B=3$.
$$\frac{x^2+2x-7}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{-2}{x-1}+\frac{3x+5}{x^2+1}.$$
$$\int\frac{x^2+2x-7}{(x-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{-2}{x-1}+\frac{3x+5}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=-2\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln(x^2+1)+5\arctan x+C.$$

例 3-27　求 $\int\frac{2x+2}{x^2+6x+13}\mathrm{d}x$.

分析：被积函数的分母 $x^2+6x+13$ 在实数范围内不能因式分解，可用凑微分法求解.

解
$$\int\frac{2x+2}{x^2+6x+13}\mathrm{d}x=\int\frac{2x+6-4}{x^2+6x+13}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x^2+6x)}{x^2+6x+13}-4\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2+2^2}$$
$$=\ln(x^2+6x+13)-2\arctan\frac{x+3}{2}+C.$$

可以证明，将有理函数化为部分分式之和后，只出现三类情况：

（1）多项式；（2）$\frac{A}{(x-a)^n}$；（3）$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$（其中 $p^2-4q<0$）.

这三类积分均可积出，且原函数都是初等函数．因此有理函数的原函数都是初等函数．

对于实际问题中所碰到的积分，通常可以查阅已经编成的积分表．大多数积分表均按被积函数的类型编排，使用时可直接或经过简单变形后从积分表中查得所需结果.

因为初等函数在其定义区间内均连续，所以其原函数一定存在，但不一定都是初等函数．例如 $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$、$\int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$、$\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$、$\int\sin x^2\mathrm{d}x$、$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+1}}$等都不是初等函数，这类积分称为“积不出”的积分．

【思考与练习】

1. 在区间$(-\infty,+\infty)$上，下列命题是否正确？为什么？

(1) $\frac{x^3}{3}$是x^2的原函数；

(2) $\ln|x|$是$\frac{1}{x}$的原函数；

(3) $\arcsin x$是$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的原函数.

2. 证明函数$\ln x$、$\ln ax$(常数$a>0$)和$\ln x+b$(b为常数)是同一函数的原函数. 说明这三个函数相互之间均只差一个常数.

3. 下列式子是否正确？为什么？

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x),\ \int f'(x)\mathrm{d}x=f(x),\ \mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x).$$

第二节　定　积　分

定积分是积分学的一个重要概念，在科学研究和生产实践中应用十分广泛，如平面图形面积、变力所做的功等都可以归结为定积分问题. 本节从两个实例——求曲边梯形的面积和变速直线运动的路程入手，引出定积分概念，接着讨论定积分的性质、定积分与不定积分的内在联系.

一、定积分的概念

例 3-28　曲边梯形的面积. 由连续曲线$y=f(x)(x\geqslant 0)$与直线$x=a$、$x=b$、$y=0$围成的平面图形称为曲边梯形(图 3-3). 求曲边梯形的面积A.

由于曲边梯形有一边是曲线，其高$f(x)$是变动的，而矩形的高是不变的，所以不能直接用矩形面积的公式来计算. 但如果把区间$[a,b]$划分为若干个小区间，则所求的曲边梯形分割成若干个以小区间为底的小曲边梯形，由于$f(x)$在$[a,b]$连续，而小区间长度很小，所以小曲边梯形的高度变化很小，因此小曲边梯形面积可由小区间上任一点的函数值为高的小矩形面积近似代替. 这些小矩形面积之和作为曲边梯形面积A的近似值.

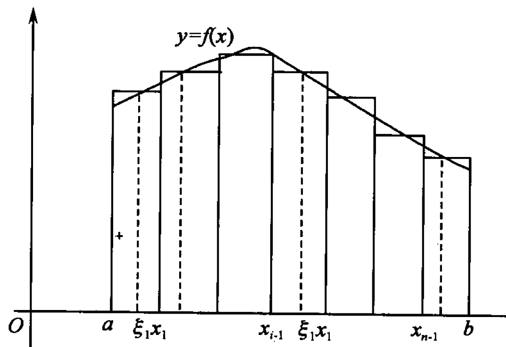


图 3-3

显然，把区间$[a,b]$分割得越细，所得面积近似程度就越好，当每个小区间的长度趋于零时，其极限值就是曲边梯形面积A的精确值. 具体做法如下：

(1) **分割**：将曲边梯形分割为n个小曲边梯形，在区间$[a,b]$内任意插入$n-1$个分点：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

把$[a,b]$分成n个小区间，每个小区间的长度为

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

(2) **近似**：在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$上任取一点$\xi_i$，则小曲边梯形的面

积 ΔA_i 可近似地用以 Δx_i 为底、$f(\xi_i)$ 为高（以直代曲）的小矩形面积代替，即

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

（3） **求和**：将上述 n 个小矩形面积加起来，就得到曲边梯形面积的近似值

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

（4） **取极限**：记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，$\lambda\to 0$ 表示每个小区间长度都趋于 0，则曲边梯形面积的精确值为

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

例 3-29　变速直线运动的路程．设某物体作直线运动，已知速度 $v=v(t)\geqslant 0$ 是时间间隔 $[T_1,T_2]$ 上的连续函数，求这段时间内物体所经过的路程 s.

由于速度函数是连续变化的，故解法与求曲边梯形的面积类似．

（1） **分割**：在时间间隔 $[T_1,T_2]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点：

$$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=T_2,$$

把 $[T_1,T_2]$ 分成 n 个小区间，各小区间的长度为 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，$(i=1,2,\cdots,n)$.

（2） **近似**：在区间 $[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 内任取一时刻 τ_i，以此时刻的速度 $v(\tau_i)$ 代替 $[t_{i-1},t_i]$ 上各个时刻的速度，则每小段路程的近似值为

$$\Delta s_i\approx v(\tau_i)\Delta t_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

（3） **求和**：求出总路程的近似值

$$s=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i.$$

（4） **取极限**：得到总路程的精确值

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i，\text{其中 } \lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}.$$

从上面两例来看，虽然实际意义不同——前者为几何量，后者为物理量，但都由一个函数及其自变量的变化区间所决定，其解决问题的方法和步骤完全相同，并且都归结为求一个具有完全相同数学结构的和式的极限．

定义 3-3　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，任取分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i\,(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (\text{其中 } \Delta x_i=x_i-x_{i-1}). \tag{3-2}$$

如果不论对 $[a,b]$ 如何分法以及 ξ_i 如何取法，只要当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$ 时，和式(3-2)的极限存在，则称此极限值为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**定积分(definite integral)**，记为 $\int_a^b f(x)\,dx$. 即

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

其中称 $f(x)$ 为被积函数，$f(x)\,dx$ 为被积表达式，x 为积分变量，a 和 b 分别为积分下限和积分上限，$[a,b]$ 为积分区间，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 为积分和．

定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 作为和式(3-2)的极限，是唯一的一个数，只与被积函数、积分区间有关，而与积分变量所用的记号无关．即

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du.$$

根据定积分的定义，前面两个实例中的面积或路程都可以用定积分表示.

曲边梯形的面积可表示为

$$A=\int_a^b f(x)\,dx.$$

变速直线运动的路程可表示为

$$S=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\,dt.$$

当$f(x)\geqslant 0$时，$\int_a^b f(x)dx$表示由曲线$y=f(x)$、直线$x=a$、$x=b$及x轴所围成的曲边梯形面积.

当$f(x)\leqslant 0$时，$\int_a^b f(x)dx$表示由曲线$y=f(x)$、直线$x=a$、$x=b$及x轴所围成的曲边梯形面积的负值.

一般情况下，把处于x轴上方的图形的面积赋以正号，处于x轴下方的图形的面积赋以负号，**定积分$\int_a^b f(x)dx$的几何意义为**：它是介于x轴、曲线$y=f(x)$及直线$x=a$、$x=b$之间的各部分面积的代数和，如图3-4

$$\int_a^b f(x)\,dx=S_1-S_2+S_3-S_4.$$

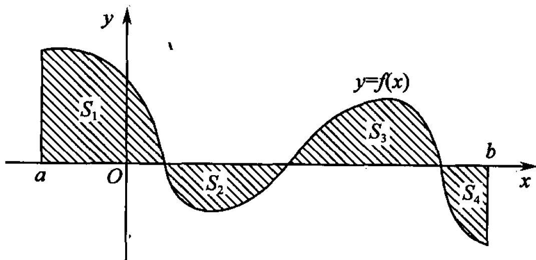


图3-4

如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在，则称$f(x)$在$[a,b]$上**可积**. 可以证明：(1)若$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在区间$[a,b]$上可积；(2)若$f(x)$在区间$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

例3-30 由定积分定义计算$\int_0^1 x^2dx$.

解 因被积函数$f(x)=x^2$在$[0,1]$连续，故可积. 为方便计算，把区间$[0,1]$分成n等分，分点为$x_i=\frac{i}{n}$ $(i=0,1,\cdots,n)$，每个小区间的长度$\Delta x_i=\frac{1}{n}$，取小区间右端点为$\xi_i=\frac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 于是

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \xi_i^2\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}.$$

对定积分补充如下定义：

(1) $\int_a^a f(x)dx=0$；

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

二、定积分的性质

性质3-5 $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ （k是常数）.

性质3-6 $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$.



性质 3-7 定积分对积分区间具有可加性，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{其中 } a、b、c \text{ 为三个任意实数}).$$

性质 3-8 如果在区间$[a,b]$上，$f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

性质 3-9 设 M、m 是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值和最小值，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

性质 3-10（定积分中值定理） 如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a\leqslant \xi \leqslant b).$$

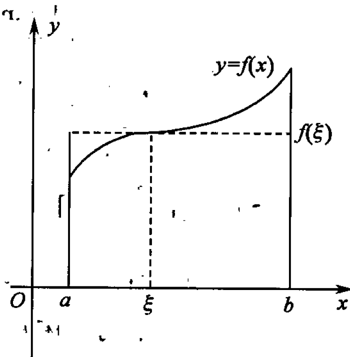


图 3-5

定积分中值定理的几何意义是：以区间$[a,b]$为底、曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形面积等于同底、高为$f(\xi)$的矩形面积（见图 3-5）. 通常称 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 为函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值.

三、牛顿—莱布尼兹公式

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，如果 x 在区间$[a,b]$上任意变动，那么对于每一个取定的 x 值，定积分 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 必有唯一确定的对应值，所以 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 x 的一个函数，记为 $G(x)$：

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

函数 $G(x)$称为积分上限函数.

定理 3-2 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则积分上限函数

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在$[a,b]$上可导，且

$$G'(x)=\left[\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]'=f(x).$$

证

$$\Delta G = G(x+\Delta x)-G(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)\Delta x,$$

$$\frac{\Delta G}{\Delta x}=\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=f(\xi) \quad (\text{其中 } \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x+\Delta x \text{ 之间}).$$

因为 $\Delta x\to 0$ 时，$\xi\to x$，且$f(x)$在$[a,b]$上连续，所以

$$G'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta G}{\Delta x}=\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x).$$

这个定理指出了一个重要结论：任何连续函数都是有原函数的. 如果$f(x)$是连续函数，则 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 就是它的一个原函数. 这就回答了上节遗留下来的一个问题：尽管不能用初等函数表示出 e^{-x^2}等的不定积分，但却不能说它们的不定积分不存在.

例 3-31 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\mathrm{d}t}{x^2}$.

解 当$x\to 0$时，$\dfrac{\int_0^x \sin t\mathrm{d}t}{x^2}$是$\dfrac{0}{0}$型不定式，由 L'Hospital 法则及定理 3-2，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \sin t\mathrm{d}t\right)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

推论 如果$f(t)$连续，$a(x)$、$b(x)$可导，则

$$\left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]'=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x).$$

例 3-32 求$\left[\int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right]'$.

解 $\left[\int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right]'=e^{-x^6}(x^3)'-e^{-x^4}(x^2)'=3x^2e^{-x^6}-2xe^{-x^4}$.

按定义计算定积分是困难的，因此需要解决定积分的计算问题．Newton 和 Leibniz 把定积分的计算归结为求原函数的运算，得到了微积分基本定理．

定理 3-3(微积分基本定理) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

证 已知$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，又由定理 3-2 知，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$也是$f(x)$的一个原函数．由于同一函数的任何两个原函数之间只能相差一个常数，所以

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)+C$$

令$x=a$，$F(a)+C=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0$，得$C=-F(a)$，代入上式，有

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a)$$

令$x=b$，上式成为
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$$

一般常写成如下形式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a). \tag{3-3}$$

式(3-3)就是著名的**牛顿—莱布尼兹(Newton-Leibniz)公式**，这个公式将定积分的计算转化为求不定积分的问题．

例 3-33 用牛顿—莱布尼兹公式重新计算例 3-30，即求$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}-0=\dfrac{1}{3}$.

例 3-34 求$\int_{-1}^3 |2-x|\mathrm{d}x$.

解 $|2-x|=\begin{cases}2-x & x\leqslant 2\\ x-2 & x>2.\end{cases}$

$$\int_{-1}^3|2-x|\mathrm{d}x=\int_{-1}^2(2-x)\mathrm{d}x+\int_2^3(x-2)\mathrm{d}x=5.$$

例 3-35 设小鼠的能量代谢率 *EMR* 以日为周期而变化：

$$EMR(t)=-0.6\cos\frac{\pi t}{12}+1.2(\mathrm{kJ/d})$$

其中 $t=0,24,48,\cdots$ 相应于下午4点．求小鼠的日代谢值 EM．

解 小鼠一天之内的能量代谢值可用$[0,24]$这一时间间隔里代谢率的积分求得，即

$$EM=\int_0^{24}EMR(t)\mathrm{d}t=\int_0^{24}\left(-0.6\cos\frac{\pi t}{12}+1.2\right)\mathrm{d}t=\left[-0.6\times\frac{12}{\pi}\sin\frac{\pi t}{12}+1.2t\right]\Big|_0^{24}$$
$$=28.8(\mathrm{kJ/d}).$$

四、定积分的换元积分法和分部积分法

1. 定积分的换元积分法

如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，而 $x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上是单值的且有连续的导数，当自变量 t 在$[\alpha,\beta]$上变化时，由函数 $\varphi(t)$ 所确定的 x 值在$[a,b]$上变化，且 $\varphi(\alpha)=a$、$\varphi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{3-4}$$

式(3-4)称为定积分的换元公式．在应用时必须注意：①换元后定积分的上下限要相应改变，即换元必换限；②求出新变量的积分后，只要将新的积分限代入计算，不必换回原来的变量．

例 3-36 求(1) $\int_0^1(x^2+1)^3x\mathrm{d}x$，(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5x\sin x\mathrm{d}x$．

解 (1) 令 $x^2+1=t$，则 $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时，$t=1$；$x=1$ 时，$t=2$，故

$$\int_0^1(x^2+1)^3x\mathrm{d}x=\int_1^2 t^3\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}t^4\Big|_1^2\right)=\frac{15}{8}.$$

如果不明显地写出新变量 t，则不必改变积分限，即：

$$\int_0^1(x^2+1)^3x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2+1)^3\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(x^2+1)^4\right]\Big|_0^1=\frac{15}{8}.$$

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5x\mathrm{d}(\cos x)=-\left[\frac{1}{6}\cos^6x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{6}.$$

例 3-37 求 $\int_0^1x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$．

分析 本例可用第二换元法求解，注意换元时必须换限．

解 $$\int_0^1x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^22t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos4t}{2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{8}\left[t-\frac{\sin4t}{4}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}.$$

例 3-38 设函数$f(x)$在区间$[-a,a]$上连续，试证：

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & \text{当}f(x)\text{为奇函数}\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x & \text{当}f(x)\text{为偶函数}\end{cases}.$$

证 $$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\because\ \int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=-u}-\int_a^0 f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^a f(-x)\mathrm{d}x,$$

$$\therefore\ \int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & \text{当}f(x)\text{为奇函数}\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x & \text{当}f(x)\text{为偶函数}\end{cases}.$$

例如 $\int_{-1}^{1} x^4 \sin x \mathrm{d}x = 0.$

$$\int_{-2}^{2} |x| \mathrm{d}x = 2\int_0^2 |x| \mathrm{d}x = 2\int_0^2 x\mathrm{d}x = 4.$$

2. 定积分的分部积分法

设函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 都在 $[a,b]$ 上有连续的导函数，对公式

$$uv' = (uv)' - u'v$$

的两端取从 a 到 b 的定积分，有

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'\mathrm{d}x - \int_a^b u'v\mathrm{d}x$$

故
$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v\mathrm{d}x. \tag{3-5}$$

式(3-5)称为定积分的分部积分公式.

例 3-39 $\int_1^e \ln x\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = e - x\Big|_1^e = 1.$

例 3-40 药物从患者的尿液中排出，一种典型的排泄速率函数是 $x(t) = te^{-kt}$，其中 k 是常数．求在时间间隔 $[0,T]$ 内，排出药物的量 D.

解 $D = \int_0^T r(t)\mathrm{d}t = \int_0^T te^{-kt}\mathrm{d}t = -\frac{1}{k}\left(te^{-kT}\Big|_0^T - \int_0^T e^{-kT}\mathrm{d}t\right) = -\frac{T}{k}e^{-kT} - \frac{1}{k^2}e^{-kT}\Big|_0^T$

$$= \frac{1}{k^2} - e^{-kT}\left(\frac{T}{k} + \frac{1}{k^2}\right).$$

【思考与练习】

1. 说明定积分 $\int_0^3 (x^2+1)\mathrm{d}x$ 与不定积分 $\int (x^2+1)\mathrm{d}x$ 的联系及区别，进一步说明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的区别.

2. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是其在该区间的原函数，对不对? $\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ 是否为 $f(x)$ 的原函数? 为什么?

3. 一个函数若有原函数，则有无穷多个原函数．那么利用 Newton－Leibniz 公式计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ 时，是否会由于选取不同的原函数而得到不同的积分值? 为什么?

第三节 定积分的应用

将实际问题转化成定积分定义中的“分割、近似、求和、取极限”的方法称为微元法．用微元法解决实际问题归结为：

（1）在 $[a,b]$ 中的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上以均匀变化近似代替非均匀变化，列出所求量的微元：$\mathrm{d}A = f(x)\mathrm{d}x$；

（2）对上式积分，即得所求量 A 的定积分表达式：$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

以上两步，关键是第一步，即要正确地列出所求量 A 的微元 $\mathrm{d}A = f(x)\mathrm{d}x$.

一、平面图形的面积

由曲线 $y=f_1(x)$、$y=f_2(x)$ $(f_1(x)\geqslant f_2(x))$ 和直线 $x=a$、$x=b$ $(a<b)$ 围成的平面图形



如图 3-6 所示，求其面积 A .

现用微元法求解：在$[a,b]$内任取小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，它所相应的窄条面积、近似等于高为$[f_1(x)-f_2(x)]$（以直代曲）、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄条矩形面积，故微元 $\mathrm{d}A=[f_1(x)-f_2(x)]\mathrm{d}x$，因此

$$A=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]\mathrm{d}x.$$

同理，由曲线 $x=\varphi_1(y)$、$x=\varphi_2(y)$ $(\varphi_1(y)\geqslant\varphi_2(y))$ 及 $y=c$、$y=d$ $(c<d)$ 围成的平面图形面积（图 3-7）为

$$A=\int_c^d[\varphi_1(y)-\varphi_2(y)]\mathrm{d}y.$$

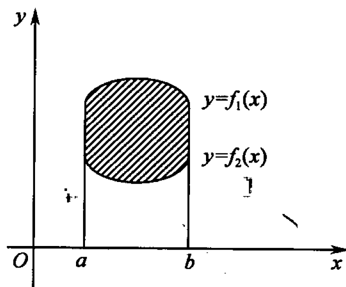


图 3-6

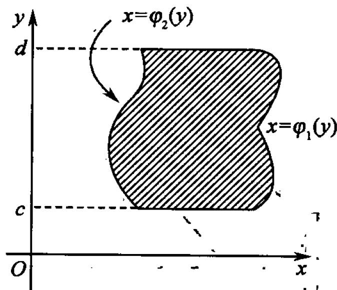


图 3-7

例 3-41　求由曲线 $y=2-x^2$ 和 $y=x^2$ 所围成图形的面积（图 3-8）.

解　解方程组

$$\begin{cases}y=2-x^2\\ y=x^2\end{cases}$$

得交点$(-1,1)$、$(1,1)$，积分变量 x 从 -1 变到 1，面积为

$$A=\int_{-1}^1[(2-x^2)-x^2]\mathrm{d}x=\int_{-1}^1(2-2x^2)\mathrm{d}x=4\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$$

例 3-42　求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积 S.

解　所求面积如图 3-9. 由对称性，椭圆的面积等于它在第一象限内那部分面积的 4 倍.

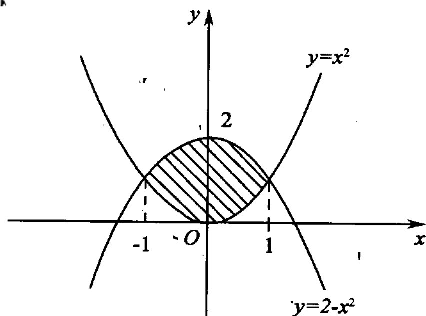


图 3-8

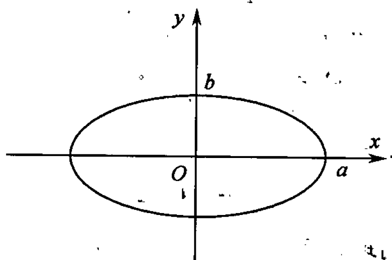


图 3-9

$$S=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=a\sin t}4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2t}\cos t\mathrm{d}t=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t$$

$$= 4ab\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

当 $b=a$ 时，就得到圆面积公式 $S=\pi a^2$.

例 3-43 求抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围图形的面积 S.

解 解方程组 $\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$ 得两曲线交点 $(2,-2)$、$(8,4)$.

解法 1. 取 x 为积分变量（如图 3-10），则

$$S = \int_0^2 [\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x})]\mathrm{d}x + \int_2^8 [\sqrt{2x}-(x-4)]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_2^8 = 18.$$

解法 2 选取积分变量为 y（如图 3-11），则

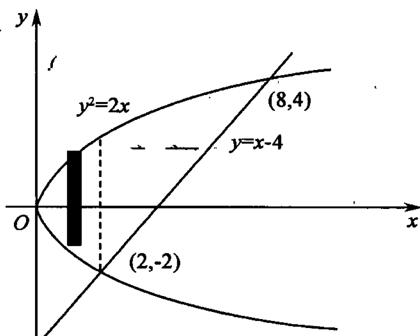


图 3-10

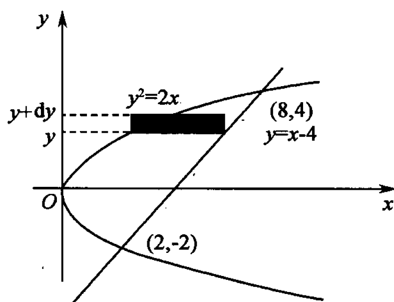


图 3-11

$$S = \int_{-2}^4 \left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right]\Bigg|_{-2}^4 = 18.$$

显然，解法 2 较简便.

二、旋转体的体积

旋转体可以看成是由一个平面图形绕某轴旋转而成的. 如矩形绕它的一条边旋转便得到圆柱体，直角三角形绕它的一条直角边旋转便得到圆锥体等等. 下面讨论由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$、$x=b\,(a<b)$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 Ox 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V_x 的计算公式.

在 $[a,b]$ 内任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，过点 x 及 $x+\mathrm{d}x$ 并垂直于 x 轴的两个平面截得旋转体上一小薄片（图 3-12），由于 $\mathrm{d}x$ 很小，小薄片体积 ΔV 可近似看成是以 πy^2 为底面积、以 $\mathrm{d}x$ 为高的小圆柱体的体积. 故体积微元 $\mathrm{d}V=\pi y^2\mathrm{d}x$，于是

$$V_x = \int_a^b \pi y^2\mathrm{d}x = \int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x.$$

同理，由曲线 $x=\varphi(y)$ 及直线 $y=c$、$y=d\,(c<d)$ 与 y 轴所围成的平面图形绕 Oy 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V_y = \int_c^d \pi x^2\mathrm{d}y = \int_c^d \pi\varphi^2(y)\mathrm{d}y.$$

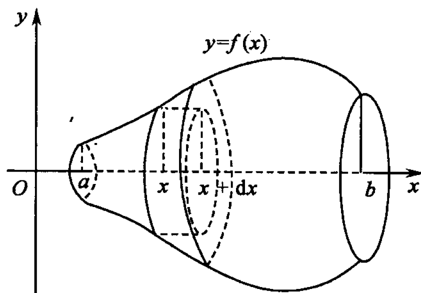


图 3-12

例 3-44 求由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转而成



的椭球体的体积.

解 $V_x = \int_{-a}^{a} \pi y^2 dx = \pi\int_{-a}^{a} b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{3}\pi ab^2$

如果令 $a = b = R$，就得到半径为 R 的球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

例 3-45 求由抛物线 $y = x^2$、直线 $x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 Oy 轴旋转一周所得的体积.

解 旋转体的图形如图 3-13 所示，所求体积为圆柱体的体积减去中间杯状体的体积：

$$V_y = \int_0^4 \pi 2^2 dy - \int_0^4 \pi(\sqrt{y})^2 dy = \int_0^4 \pi(4 - y)dy = 8\pi.$$

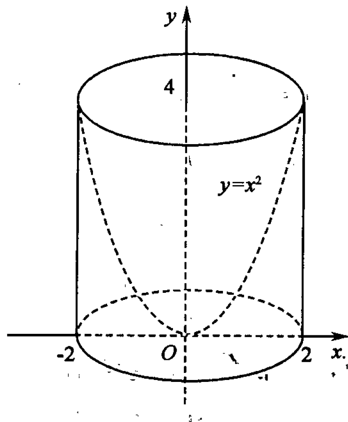


图 3-13

三、变力沿直线所做的功

设物体在常力 F 作用下沿直线移动的距离为 s，那么常力所做的功 W 为

$$W = F \cdot s.$$

设物体在变力 $F(x)$ 作用下，沿 x 轴从 $x = a$ 移动到 $x = b$. 在 $[a,b]$ 内任取一点 x，把 x 处的变力 $F(x)$ 近似地看作小区间 $[x, x + dx]$ 上的常力，得到功的微元

$$dW = F(x)dx$$

于是所求的功为

$$W = \int_a^b F(x)dx.$$

例 3-46 已知某一弹簧每拉长 0.02 米要用 9.8 牛顿的力，求把该弹簧拉长 0.1 米所做的功.

解 由实验知道，弹簧拉伸所需的力 F 与伸长量 x 成正比，即 $F = kx$（k 为比例常数）.

$$k = \frac{F}{x} = \frac{9.8}{0.02} = 4.9 \times 10^2$$

$$W = \int_0^{0.1} F(x)dx = \int_0^{0.1} 4.9 \times 10^2 x dx = 4.9 \times 10^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^{0.1} = 2.45\text{（焦耳）}.$$

四、连续函数在已知区间上的平均值

“平均”这个概念经常出现于生产实践及科学实验中，例如平均速度、平均功率等等. 积分中值定理给出了计算函数平均值的公式：

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

例 3-47 求函数 $y = 1 - x^2$ 在区间 $[-1,1]$ 上的平均值.

解 $\bar{y} = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = \frac{2}{3}.$

例 3-48 胰岛素平均浓度的测定.

由实验测定病人的胰岛素浓度，先让病人禁食，以降低体内血糖水平，然后注射大量的糖给病人. 假定由实验测得病人的血液中胰岛素的浓度 $C(t)$（单位/ml）为

$$C(t)=\begin{cases}t(10-t) & 当\ 0\leqslant t\leqslant 5\\ 25e^{-k(t-5)} & 当\ t>5\end{cases}.$$

其中 $k=\frac{\ln 2}{20}$，时间 t 的单位是分钟，求血液中的胰岛素在一小时内的平均浓度 $\overline{C}(t)$.

解 $\overline{C}(t)=\frac{1}{60-0}\int_0^{60}C(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{60-0}\left[\int_0^5 C(t)\mathrm{d}t+\int_5^{60}C(t)\mathrm{d}t\right]$

$=\frac{1}{60}\left[\int_0^5 t(10-t)\mathrm{d}t+\int_5^{60}25e^{-k(t-5)}\mathrm{d}t\right]$

$\approx\frac{1}{60}(83.33+614.12)\approx 11.62$(单位/ml).

五、定积分在医学中的应用

1. 染料稀释法确定心输出量

例 3-49 心输出量是指每分钟心脏泵出的血量，在生理学实验中常用染料稀释法来测定. 把一定量的染料注入静脉，染料将随血液循环通过心脏到达肺部，再返回心脏而进入动脉系统.

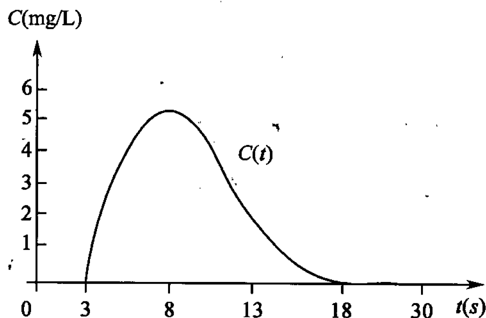


图 3-14

假定在时刻 $t=0$ 时注入 5mg 染料，自染料注入后便开始在外周动脉中连续 30 秒监测血液中染料的浓度，它是时间的函数 $C(t)$（图 3-14）：

$$C(t)=\begin{cases}0 & 当\ 0\leqslant t\leqslant 3\ 或\ 18<t\leqslant 30\\ (t^3-40t^2+453t-1026)10^{-2} & 当\ 3<t\leqslant 18\end{cases}$$

注入染料的量 M 与在 30 秒钟之内测到的平均浓度 $\overline{C}(t)$ 的比值是半分钟里心脏泵出的血量，因此，每分钟的心输出量 Q 是这一比值的 2 倍，即

$$Q=\frac{2M}{\overline{C}(t)}.$$

试求这一实验中的心输出量 Q.

解 $\overline{C}(t)=\frac{1}{30-0}\int_0^{30}C(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{30}\int_3^{18}(t^3-40t^2+453t-1026)10^{-2}\mathrm{d}t$

$=\frac{10^{-2}}{30}\left(\frac{t^4}{4}-\frac{40t^3}{3}+\frac{453t^2}{2}-1026t\right)\Big|_3^{18}=\frac{10^{-2}}{30}[3402-(-1379.25)]$

$=1.59375$

因此 $Q=\frac{2M}{\overline{C}(t)}=\frac{2\times 5}{1.59375}\approx 6.275$(L/min).

2. 脉管稳定流动时的血流量的测定

例 3-50 设有半径为 R，长为 L 的一段刚性血管，两端的血压分别为 p_1 和 p_2($p_1>p_2$). 已知在血管的横截面上离血管中心 r 处的血流速度符合 Poiseuille 公式

$$V(r)=\frac{p_1-p_2}{4\eta L}(R^2-r^2)$$

其中 η 为血液黏滞系数. 求在单位时间流过该横截面的血流量 Q.

解 将半径为 R 的截面圆分为 n 个圆环，使每个圆环的厚度为 $\Delta r=\frac{R}{n}$. 又因为圆环面积的近似值为 $2\pi r_i\Delta r$，所以在单位时间内通过第 i 个圆环的血流量 ΔQ_i 的近似值为



$$\Delta Q_i \approx V(\xi_i) \cdot 2\pi r_i \cdot \Delta r$$

其中 $\xi_i \in [r_i, r_i + \Delta r]$.

故 $$Q = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} V(\xi_i) \cdot 2\pi r_i \Delta r = \int_0^R V(r)2\pi r\mathrm{d}r = \int_0^R \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)2\pi r\mathrm{d}r$$
$$= \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\eta L}\int_0^R (R^2 r - r^3)\mathrm{d}r = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8\eta L}.$$

【思考与练习】

1. 什么叫微元法？该法的关键是哪个步骤？用微元法解决实际问题应注意什么？

2. 求由曲线 $y = \sin x$ 与 x 轴以及直线 $x = 0$、$x = 2\pi$ 所围平面图形的面积，某人的解法为面积 $S = \int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x = 0$，指出其错误的原因，并更正.

*第四节 广义积分

在许多实际问题中，会遇到积分区间无限或被积函数无界的积分，这两类积分统称为**广义积分(improper integral)**，广义积分不属于前面所说的定积分.

一、无穷区间的广义积分

由例 3-40 可知，在时间间隔 $[0,T]$ 内，从患者尿液中排出药物的量为

$$D = \int_0^T te^{-kt}\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2} - e^{-kT}\left(\frac{T}{k} + \frac{1}{k^2}\right).$$

如果所求的是排出药物的总量，则时间上限 T 应当趋于 $+\infty$，即

$$D = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T te^{-kt}\mathrm{d}t = \lim_{T\to+\infty}\left[\frac{1}{k^2} - e^{-kT}\left(\frac{T}{k} + \frac{1}{k^2}\right)\right] = \frac{1}{k^2}.$$

这极限值称为 te^{-kt} 在无穷区间 $[0, +\infty)$ 上的广义积分.

定义 3-4 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，如果极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,(a < b)$ 存在，则称此极限为 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的广义积分，记为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称无穷限广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在或**收敛(convergent)**；若极限不存在，则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 不存在或**发散(divergent)**.

若记 $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$，则广义积分的计算可统一到牛顿—莱布尼兹公式的情形：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a). \tag{3-6}$$

类似地，定义广义积分

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x \quad (c\text{ 为任意常数}).$$

当上式右端两个广义积分都收敛时，称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称广义积分发散.

与公式(3-6)类似，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty).$$

例 3-51 求广义积分.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;　　(2) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

解 (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x - \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

(2) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{1}^{+\infty} = +\infty$.

广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 在几何上表示曲线 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 与 x 轴所围图形的面积为 π（图 3-15）.

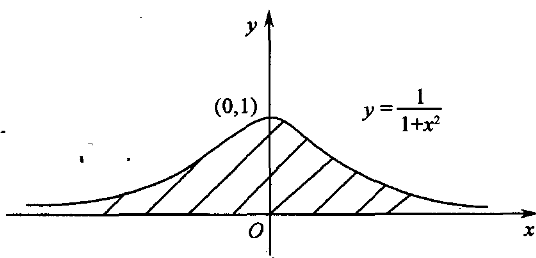


图 3-15

例 3-52 设静脉注射某药的血药浓度—时间曲线符合函数 $C = C_0 e^{-kt}$，其中 C_0 为 $t=0$ 时的血药浓度，k 为正常数，试求 C—t 曲线下的总面积 AUC.

解 $AUC = \int_{0}^{+\infty} C_0 e^{-kt}\,dt = \frac{-C_0}{k}[e^{-kt}]\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{C_0}{k}$.

二、无界函数的广义积分

定义 3-5 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$，如果 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$（$\varepsilon > 0$）存在，则称这个极限为函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的广义积分，记为 $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$，即

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

这时称**无界函数广义积分** $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ 收敛；否则称广义积分发散.

类似地，对函数 $f(x)$ 在 $x=b$ 及 $x=c\ (a<c<b)$ 处有无穷间断点的广义积分分别定义为：

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \quad (\varepsilon > 0).$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx \quad (\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0).$$

若 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$，只有当上式右端两个极限都存在时，称广义积分 $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ 收敛，否则称广义积分发散.

例 3-53 计算 $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 因 $x=1$ 是被积函数的无穷间断点，故

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to0^+}[\arcsin x]\Big|_{0}^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$



例 3-54　求 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

解　$x=0$ 是被积函数的无穷间断点，由于

$$\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{0+\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]\Bigg|_{0+\varepsilon_2}^{1}=\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=+\infty$$

即广义积分 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$ 发散，所以 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ 发散.

如果没有注意到 $x=0$ 是无穷间断点，就会得出以下的错误结果：

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]\Bigg|_{-1}^{1}=-2.$$

【思考与练习】

指出下面运算中的错误，并给出正确的解答.

1. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=[\ln|x|]_{-1}^{1}=0$;

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}x dx \xlongequal{\text{由例 3-38}} 0.$

习　题　三

1. 用直接积分法求下列不定积分

(1) $\int(x^3+1)dx$;　(2) $\int\sqrt[3]{x}dx$;

(3) $\int(e^x-2)dx$;　(4) $\int 3\sin x dx$;

(5) $\int x\sqrt{x}dx$;　(6) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$;

(7) $\int\cot^2 x dx$;　(8) $\int(1+\sin x+\cos x)dx$;

(9) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$;　(10) $\int\frac{4x-3\sqrt{x}-5}{x}dx$;

(11) $\int\frac{x^3-27}{x-3}dx$;　(12) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

(13) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$;　(14) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$.

2. 用换元积分法求下列不定积分

(1) $\int\sin^3 x\cos x dx$;　(2) $\int\sin 2x\cos^3 x dx$;

(3) $\int\frac{3dx}{(1-2x)^2}$;　(4) $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$;

(5) $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$;　(6) $\int\frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx$;

(7) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$;　(8) $\int(3-2x)^8 dx$;

(9) $\int\frac{dx}{1+9x^2}$;　(10) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$;

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

(12) $\int \frac{\sec x \cdot \tan x}{\sqrt{\sec^2 x+1}}dx$;

(13) $\int \sin^4 x dx$;

(14) $\int (\tan x - \cot x)dx$;

(15) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}}$;

(16) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$;

(17) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$;

(19) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$;

(20) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+3}}$;

(21) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$;

(22) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3. 用分部积分法求下列不定积分

(1) $\int xe^{-x}dx$;

(2) $\int x\sin 2x dx$;

(3) $\int x^2\cos^2 x dx$;

(4) $\int \ln(x^2+1)dx$;

(5) $\int (\arcsin x)^2 dx$;

(6) $\int \cos(\ln x)dx$;

(7) $\int \frac{(\ln x)^3}{x^2}dx$;

(8) $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx$;

(9) $\int \sqrt{9-x^2}dx$;

(10) $\int x^2\sin x dx$;

(11) $\int \ln^2 x dx$;

(12) $\int e^{ax}\sin bx dx$.

4. 求下列不定积分

(1) $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$;

(2) $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}dx$;

(3) $\int \frac{x^3}{x+3}dx$;

(4) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$;

(5) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

(6) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;

(7) $\int \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(8) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$;

(9) $\int \frac{1}{\sqrt{25+3x}}dx$;

(10) $\int \frac{x}{\sqrt{25+3x}}dx$;

(11) $\int x^2\arctan x dx$;

(12) $\int x^2\ln x dx$;

(13) $\int x^2 e^x dx$;

(14) $\int e^{\sqrt{x}}dx$;

(15) $\int xf'(x)dx$，其中$f(x)$的原函数是$\frac{\cos x}{x}$；

(16) $\int xf'(2x)dx$，其中$f(x)$的原函数是$\frac{\sin x}{x}$.

5. 由定积分的定义计算 $\int_a^b xdx \quad (a<b)$.

6. 求：



(1) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt$; (2) $\frac{d}{dx}\left(\int_{x^4}^{x^5}\cos t^2 dt\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2dt}{\sqrt{x^2+1}}$;

(5) $\frac{d}{dx}\int_a^b\sin x^2dx$; $\frac{d}{da}\int_a^b\sin x^2dx$; $\frac{d}{db}\int_a^b\sin x^2dx$.

7. 计算下列定积分

(1) $\int_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}dx$; (2) $\int_0^{\pi}\sin xdx$;

(3) $\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$; (4) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

(5) $\int_0^{2\pi}x^2\cos xdx$; (6) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$;

(7) $\int_a^b\frac{dx}{x^2}$ $(b>a>0)$; (8) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$;

(9) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$; (10) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$;

(11) $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3x-\sin^5x}dx$; (12) $\int_{-1}^{1}f(x)dx$，其中$f(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ \sin x & x<0\end{cases}$

8. 证明

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$;

(2) $\int_0^1x^m(1-x)^ndx=\int_0^1x^n(1-x)^mdx$.

9. 设$f(x)$是在$(-\infty,+\infty)$定义的以T为周期的连续函数，即对任意的x，总成立$f(x)=f(x+T)$，证明

$$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^Tf(x)dx\quad(a\text{为任意实数}).$$

10. 大多数植物的生长率是以若干天为周期的连续函数．假定一种谷物以

$$g(t)=\sin^2(\pi t)$$

的速率生长，其中t的单位是天．求在前10天内谷物生长的量．

11. 口服药物必须先被吸收进入血液循环，然后才能在机体的不同部位发挥作用．一种典型的吸收率函数具有以下形式：

$$f(t)=kt(t-b)^2,\qquad 0\leqslant t\leqslant b,$$

其中k和b是常数．求药物吸收的总量．

12. 计算下列广义积分：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$; (2) $\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx$;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xdx}{1+x^2}$; (4) $\int_0^{\pi}\tan xdx$;

(5) $\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$; (6) $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. 求由抛物线$y=x^2-4x+5$，x轴及直线$x=3$、$x=5$所围成的图形的面积．

14. 求由抛物线$y^2=4(x+1)$与$y^2=4(1-x)$所围成的图形的面积．

15. 求由曲线$y=\ln x$、纵轴与直线$y=\ln b$、$y=\ln a$ $(b>a>0)$所围成的图形的面积．

16. 求椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

绕 y 轴旋转所产生的旋转体的体积.

17. 求双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

与 $y=\pm b$、$x=0$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转所产生的旋转体的体积.

18. 求由抛物线 $y=x^2$、$x=y^2$ 所围图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积.

19. 设火箭的质量为 m，问将火箭送到离地面高 H 处，克服地球引力需做多少功？若将火箭送到无穷远处，需做多少功?

20. 把一个带 $+q_0$ 电量的点电荷放在 r 轴上坐标原点 O 处，它产生一个电场．这个电场对周围的电荷有作用力．由物理学知道，如果另一个点电荷 $+q$ 放在这个电场中距离原点 O 为 r 的地方，那么电场对它的作用力的大小为

$$F=k\frac{q_0q}{r^2}\quad（k 是常数）.$$

当这个点电荷 $+q$ 在电场中从 $r=a$ 处沿 r 轴移动到 $r=b(a<b)$ 处时，计算电场力 F 对它所作的功.

21. 在底面积为 S 的圆柱形容器中盛有一定量的气体．在等温条件下，由于气体的膨胀，把容器中一个面积为 S 的活塞从点 a 处推移到 b 处，计算在移动过程中，气体压力所作的功.

22. 一定量的理想气体，在恒温下，当体积膨胀时，压强随之减小，体积 V 与压强 P 之间有关系 $P=C/V$（C 为常数）．求体积从 V_1 到 V_2 时的平均压强.

23. 某种类型的阿司匹林药物进入血液系统的量称为有效药量，其进入速率可表示为函数

$$f(t)=0.15t(t-3)^2\qquad(0\leqslant t\leqslant 3)$$

试求(1) 何时速率最大？这时的速率是多少?

(2) 有效药量是多少?

24. 求函数 $f(x)=\int_0^x t(t-4)\mathrm{d}t$ 在区间 $[-1,5]$ 上的最大值与最小值.

25. 求函数 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{t^2+4t+4}\mathrm{d}t$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值与最小值.

26. 设函数 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2} & 当\ x\geqslant 0 \\ \dfrac{1}{1+\cos x} & 当\ x<0 \end{cases}$，计算 $\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x$.

27. 证明 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散.

28. 证明 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^q}$ 当 $q<1$ 时收敛，当 $q\geqslant 1$ 时发散.

29. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{9n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{9n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9n^2-n^2}}\right)$.

第四章 多元函数微积分

在前面几章中，我们讨论的函数都只有一个自变量，这种只含一个自变量的函数叫做一元函数. 但在实际问题中，我们常常会遇到多个变量之间相互依存的关系，很多情况是一个变量依赖于多个变量，这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题. 本章将在一元函数微积分学的基础上，讨论多元函数的微分与积分. 讨论中我们以二元函数为主，因为从一元函数到二元函数会产生新的问题，而从二元函数到二元以上的多元函数则大多可以类推.

第一节 多 元 函 数

一、空间解析几何简介

过空间一定点 O，作三条相互垂直的数轴 Ox、Oy 和 Oz，并按右手法则(**right-hand rule**)规定它们的正方向，即以右手握住 Oz 轴，当右手的四个手指从 Ox 轴正方向以 90°角转向 Oy 轴正方向时，大拇指的指向就是 Oz 轴的正向(图 4-1)，这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系 $Oxyz$.

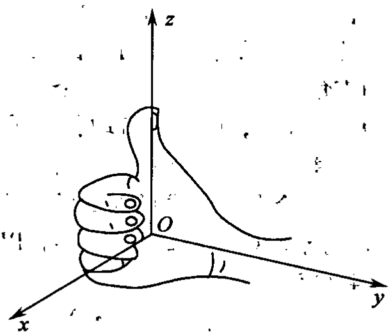


图 4-1

点 O 叫做坐标原点，这三条坐标轴分别叫做 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，且它们一般具有相同的长度单位，每两条坐标轴所确定的平面 xOy、yOz、zOx 称为坐标面.

三个坐标面把整个空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限. 在坐标面 xOy 上方，含有 x 轴、y 轴、z 轴正方向的那个卦限称为第一卦限，坐标面 xOy 上方的其余 3 个卦限，按逆时针方向依次称为第二、第三、第四卦限. 在坐标面 xOy 下方与第一、第二、第三、第四卦限对称的卦限，依次称为第五、第六、第七、第八卦限.

类似于平面上点与有序数组的一一对应关系，可建立空间中点与有序数组的一一对应关系.

对于空间中任意一点 P，过点 P 作三个平面分别与三个坐标轴垂直，且与它们分别交于 A、B、C 三点(图 4-2). 这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x、y、z，于是，点 P 唯一确定了一个三元有序数组(x,y,z)；反之，对于任意一个三元有序数组(x,y,z)，在 x 轴、y 轴、z 轴上分别找到与实数 x、y、z 对应的三个点 A、B、C，然后过这三个点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，这三个平面相交于空间一点 P，即由一个三元有序数组(x,y,z)可以确定唯一的空间一点 P. 于是空间任意一点 P 与一个三元有序数组(x,y,z)建立了一一对应的关系，我们称这个三元有序数组(x,y,z)为空间点 P 的坐标，记为 $P(x,y,z)$.

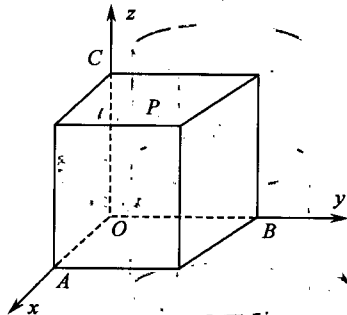


图 4-2

显然，坐标原点 O 的坐标为$(0,0,0)$，x 轴、y 轴、z 轴上任意一点的坐标分别为$(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$；



而 xOy、yOz、zOx 三个坐标面上任意一点的坐标分别为 $(x,y,0)$、$(0,y,z)$、$(x,0,z)$. 可根据空间点的坐标正、负号确定它所在的位置. 如点 $(-1,2,3)$ 在第二卦限，点 $(1,2,-4)$ 在第五卦限等.

平面上任意两点间的距离公式可推广到空间上任意两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离公式：

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{4-1}$$

例 4-1 求空间中与二定点 $A(1,2,0)$ 和 $B(2,1,3)$ 等距离的点的轨迹方程.

解 设空间点 $M(x,y,z)$ 与点 A 及点 B 的距离相等，依题意有 $|AM|=|BM|$，由公式(4-1)，有

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+z^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2},$$

化简，得

$$2x-2y+6z-9=0.$$

上式即为所求的点的轨迹方程.

在平面直角坐标系中，二元一次方程 $Ax+By+C=0$ 表示一条直线，类似可推，在空间直角坐标系中，三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 表示一个平面. 其中 A、B、C、D 为常数，且 A、B、C 不同时为零.

值得注意的是二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A、B 不同时为零），在平面直角坐标系中表示一条直线；而在空间直角坐标系中却表示一个平面. 如：方程 $2x+3y+1=0$ 中不含 z，因此 z 可取任何值，于是它在空间直角坐标系中表示一个平行于 z 轴的平面.

下面给出一些常见曲面的方程.

以点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心，以 R 为半径的球面方程（图 4-3）为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

当球心为坐标原点时，球面方程则为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

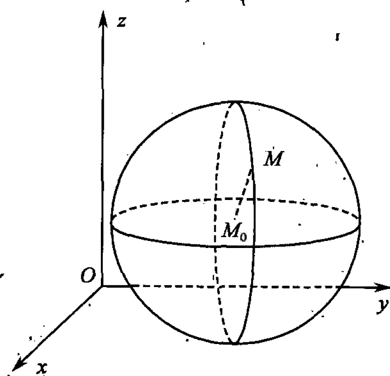


图 4-3

类似于 $Ax+By+C=0$ 在空间直角坐标系中表示一个平面，方程 $x^2+y^2=R^2$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的圆柱面，见图 4-4.

方程 $z=x^2+y^2$ 在空间直角坐标系中所表示的曲面叫做椭圆抛物面，见图 4-5.

方程 $z^2=x^2+y^2$ 在空间直角坐标系中所表示的曲面叫做圆锥面，见图 4-6.

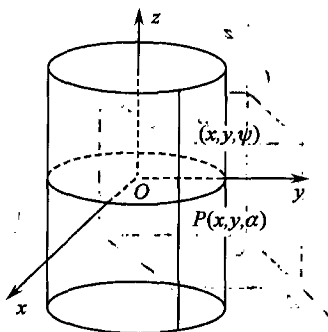


图 4-4

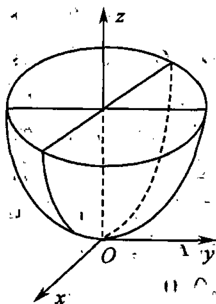


图 4-5

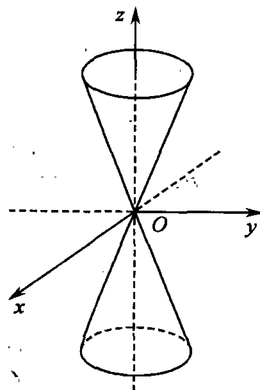


图 4-6



二、多元函数的概念

在很多自然现象以及实际问题中，经常会遇到多个变量之间相互依赖的关系. 请看下面的例子：

例 4-2　正圆锥体的体积 V 和它的高 h 及底面半径 r 之间有以下依赖关系：

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

其中 r 与 h 是两个独立的变量，而体积 V 是随着 r 和 h 的变化而变化的. 当 r、h 的值取定时，V 有确定的值与之对应.

例 4-3　一定质量的理想气体的压强 p、体积 V 和绝对温度 T 之间有如下关系：

$$p=\frac{RT}{V}.$$

其中 R 是常数，$V>0$，$T>0$，压强 p 随着 V、T 的变化而变化. 当 V、T 的值取定时，p 的值就随之而定.

例 4-4　病人在进行输液时，输液量 N 与正常血容量 V、正常红细胞比容(单位容积血液中红细胞所占容积百分比)A 及病人红细胞比容 B 的关系为：

$$N=V\left(1-\frac{A}{B}\right).$$

输液量 N 随着 V、A、B 的变化而变化. 当 V、A、B 的值取定时，N 的值就随之而定.

从上面三个例子可以看出，当两个或三个变量在允许的范围内取定一组数时，按照对应法则，另一个变量就有确定的值与之对应.

由这些实际问题的共性，就可得出二元函数、多元函数的定义.

定义 4-1　设有三个变量 x、y 和 z，如果对于变量 x、y 在它们的变化范围内所取的每一对值，变量 z 按照一定的对应法则都有确定的值与之对应，则称变量 z 为变量 x、y 的**二元函数**(**bivariate function**)，记为 $z=f(x,y)$，其中 x、y 称为**自变量**，z 称为**因变量**.

对于二元函数 $z=f(x,y)$，当自变量 x、y 取定一对值时，平面上就确定了一点 $P(x,y)$，若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处对应有函数值，则称函数在该点有定义. 在 xOy 平面上使函数 $z=f(x,y)$ 有定义的一切点的集合叫做该函数的**定义域**.

设点 $P_0(x_0,y_0)$ 是二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域内一点，按照定义，z 必有确定的值与它对应，这个值就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的**函数值**，记作

$$z\big|_{(x_0,y_0)}\quad 或\quad f(x_0,y_0).$$

当点 (x,y) 取遍定义域内的各点时，对应的函数值的集合称为二元函数的**值域**.

根据定义，前面例 4-2 中的正圆锥体的体积 V 是 r 和 h 的二元函数；例 4-3 中理想气体的压强 p 是 V 和 T 的二元函数；而例 4-4 中输液量 N 是 V、A、B 三个自变量的函数，叫做三元函数.

类似地，可定义三元函数 $u=f(x,y,z)$，以及 n 元函数 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 自变量多于一个的函数统称为**多元函数**(**multivariate function**).

例 4-5　求函数 $f(x,y)=\sqrt{x\sin y}$ 在点 $\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$ 处的函数值.

解　$f\left(4,\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{4\sin\frac{\pi}{2}}=2.$

例 4-6　求函数 $z=\sqrt{y-x^2}+\sqrt{1-y}$ 的定义域.

解　函数的定义域是使得上式右端表达式有意义的一切点的集合. 即

$$\begin{cases} y-x^2\geqslant 0 \\ 1-y\geqslant 0 \end{cases}$$

也就是 $x^2\leqslant y\leqslant 1$，它表示抛物线 $y=x^2$ 上方、直线 $y=1$ 以下所界定范围内一切点的集合(图 4-7 中阴影部分,包括实线边界).

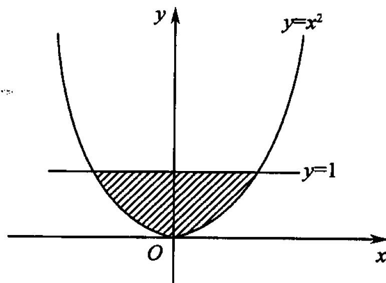


图 4-7

例 4-7 求函数 $z=\ln(x^2+y^2-1)+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ 的定义域.

解 要使函数关系式右边的两个算式同时有意义，x 和 y 必须满足不等式组：

$$\begin{cases} x^2+y^2-1>0 \\ 4-x^2-y^2>0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x^2+y^2>1 \\ x^2+y^2<4 \end{cases}$$

也就是

$$1<x^2+y^2<4.$$

所以，函数 $z=\ln(x^2+y^2-1)+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ 的定义域是图 4-8 所示的平面点集(图 4-8 中阴影部分,不包括虚线边界). 此点集是介于两圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 之间的圆环区域.

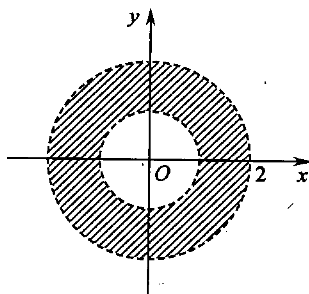


图 4-8

我们把整个 xOy 平面或者是 xOy 平面上由一条或几条曲线所围成的平面部分叫做**区域**. 围成区域的曲线称为该区域的边界，包括全部边界在内的区域称为闭区域，不包含边界的区域称为开区域. 当没有必要区分一个平面点集是开区域或是闭区域时，我们就称其为区域. 如果区域能包含在一个以原点为圆心的圆域内，则称它为有界区域，否则称为无界区域. 所谓一点的邻域，是指以该点为中心的一个圆形开区域. 常用字母 D 表示区域.

例 4-6 中函数的定义域是有界闭区域，例 4-7 中函数的定义域是有界开区域. 而函数 $z=\ln(x-y)$ 的定义域则是无界开区域.

在讨论二元函数的定义域时，如果函数关系式是由实际问题得到的，那么，它的定义域要根据问题本身的意义来确定. 如果仅研究用算式表示的二元函数，那么，函数的定义域是使得算式有意义的平面点的集合.

关于二元函数，也有复合函数和初等函数(简称为二元复合函数和二元初等函数)的概念，它们与一元函数中的复合函数和初等函数的概念相似，这里不再详细叙述.

三、二元函数的极限与连续

前面曾经讨论了一元函数的极限与连续问题，类似地可讨论二元函数的极限与连续.

1. 二元函数的极限

定义 4-2 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义(在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可以没有定义)，如果当点 $P(x,y)$ 以任何方式无限趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $z=f(x,y)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的**极限**，也称**二重极限**(**double limit**)，记为



$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{P\to P_0}f(x,y)=A.$$

说明：在一元函数极限定义中，自变量 x 以任何方式无限趋近于 x_0，是指 x 从左侧趋近于 x_0，或 x 从右侧趋近于 x_0 的两种方式. 在二元函数 $z=f(x,y)$ 的极限定义中，当点 $P(x,y)$ 以任何方式无限趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，这里，点 $P(x,y)$ 趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式很复杂，点 P 既可沿着直线或折线趋向于点 P_0，也可沿曲线趋向于点 P_0，即点 P 有无穷多条路径趋向于点 P_0.

在求一元函数极限中当 $x\to x_0$ 时，只要函数在 x_0 点的左、右极限存在且相等即可判定该函数的极限存在，而求二元函数极限中，由于 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的方式有无穷多条路径，因此即使点 P 沿着某几条曲线或直线的路径趋近于点 P_0 时，函数 $f(x,y)$ 无限趋近于同一个常数 A，仍不能判定函数的极限存在. 反之，类似于一元函数的左右极限不等则可以判定该函数的极限不存在，若点 $P(x,y)$ 沿着某两条路径趋近于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 趋近于两个不同的常数，则可以判定该二元函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的极限不存在.

例 4-8　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

解　由于　$x^2\leqslant x^2+y^2$　$y\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$，

故
$$0<\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

而 $\sqrt{x^2+y^2}$ 恰是点 $P(x,y)$ 与点 $O(0,0)$ 之间的距离 ρ，因此，不论点 $P(x,y)$ 以任何方式趋向于点 $O(0,0)$ 时，都有 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to0$.

故
$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

例 4-9　证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证　当点 $P(x,y)$ 沿着 x 轴(即固定 $y=0$)趋近于点 $O(0,0)$ 时，

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{0}{x^2}=0,$$

所以　$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}0=0.$

而当点 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=x$ 趋近于点 $O(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=x}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

因此，极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

有关一元函数中的极限运算法则，可推广到多元函数中，可看下面的例子.

例 4-10　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

解
$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(2-\sqrt{xy+4})\cdot(2+\sqrt{xy+4})}{xy\cdot(2+\sqrt{xy+4})}$$
$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{-xy}{xy\cdot(2+\sqrt{xy+4})}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}.$$

2. 二元函数的连续性

定义 4-3 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0),\tag{4-2}$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

(4-2)式又可写成

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}[f(x,y)-f(x_0,y_0)]=0.\tag{4-3}$$

若令 $x=x_0+\Delta x$，$y=y_0+\Delta y$，则(4-3)式为

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0.\tag{4-4}$$

其中 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 是当自变量 x、y 分别在 x_0、y_0 处取得增量 Δx、Δy 时，函数 $z=f(x,y)$ 的增量，记为 Δz，于是(4-4)式可写成

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}\Delta z=0,\tag{4-5}$$

或

$$\lim_{\rho\to 0}\Delta z=0.$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

即当两个自变量的增量都趋近于零时，如果函数的增量也趋近于零，则函数就在该点连续. 此结论与一元函数相应的连续性结论完全一样.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上每一点都连续，则称函数在区域 D 上连续.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续，则称点 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数 $z=f(x,y)$ 的不连续点或间断点.

例 4-11 函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y}$ 在何处不连续？

解 函数在 $x^2-y=0$，即 $y=x^2$ 时没有定义，根据连续函数的定义知，抛物线 $y=x^2$ 上的所有点都是函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y}$ 的不连续点.

例 4-12 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点是否连续？

解 由例 4-8 可知

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

又已知 $f(0,0)=0$，由定义知函数在原点是连续的.

例 4-13 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点是否连续？

解 由例 4-9 知

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在，所以函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处不连续.

类似于一元函数，二元连续函数经有限次四则运算及复合运算所得到的二元初等函数仍是连续函数. 例如，$\sin(2x+y)$，e^{x-y^2}，$\dfrac{1-x^2+y^3}{x-y}$ 等都是二元初等函数，在其定义域上是连续的。由此得出：二元初等函数在其定义区域内是连续的. 因此，如果点 $P_0(x_0,y_0)$



是二元初等函数 $z=f(x,y)$ 的定义区域内的一点，则有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

有关二元函数的极限与连续的讨论，完全可以类推到二元以上的多元函数.

例 4-14 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 2}}\dfrac{x+y}{xy}$.

解 函数 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$ 是二元初等函数，它的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\neq 0,y\neq 0\}.$$

点$(1,2)$在其定义域内，故有

$$\lim_{\substack{x\to 1\\y\to 2}}\frac{x+y}{xy}=f(1,2)=\frac{1+2}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}.$$

【思考与练习】

1. 能否用累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 计算二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$？

2. 如果 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处连续，那么 $g(x)=f(x,y_0)$ 作为 x 的函数时，它在点 x_0 处是否连续？

第二节 偏导数与全微分

一、偏导数的概念

在一元函数中，我们从研究函数的变化率引入了导数的概念，对于多元函数同样需要讨论它的变化率. 但多元函数的自变量不止一个，因变量与自变量的关系比一元函数复杂得多，因此，通常先考虑多元函数关于其中一个自变量的变化率. 以二元函数为例，如果只有自变量 x 变化，而自变量 y 固定(即将 y 视作常数)，这时它就是 x 的一元函数. 该函数对 x 的导数，就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 对于 x 的偏导数，即有如下定义：

定义 4-4 设函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处对 x 的**偏导数**(**partial derirative**)，记作

$$f'_x(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad 或\quad \left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}. \tag{4-6}$$

同样，当 x 固定在 x_0，而 y 在 y_0 处有增量 Δy 时，如果极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处对 y 的偏导数，记作

$$f'_y(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad 或\quad \left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}. \tag{4-7}$$

由式(4-6)、(4-7)所定义的偏导数是函数 $z=f(x,y)$ 沿着两个特殊方向的变化率，即一个平行于 x 轴，另一个平行于 y 轴的变化率.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 都有关于 x 的偏导数，这个偏导数仍是 x、y 的函数，称为函数 $z=f(x,y)$ 关于 x 的**偏导函数**，简称为**偏导数**，记作

$$f'_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x} \quad 或 \quad z'_x,$$

即

$$f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

同样，有函数 $z=f(x,y)$ 关于 y 的偏导函数

$$f'_y(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y} \quad 或 \quad z'_y,$$

即

$$f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 显然就是偏导函数 $f'_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值；$f'_y(x_0,y_0)$ 显然就是偏导函数 $f'_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值.

由偏导数的定义知，求函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 时，把 y 看成常量，用一元函数求导的方法求出 z 对 x 的导数；求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 时，把 x 看成常量，用一元函数求导的方法求出 z 对 y 的导数. 因此，实际上对二元函数求偏导数，就是把它看成关于其中一个自变量的一元函数来求导数. 于是，一元函数的求导法则和求导公式对求二元函数的偏导数依然适用.

例 4-15 设函数 $f(x,y)=x^2+2xy-y^3+\ln 3$，求 $f'_x(1,2)$、$f'_y(1,2)$.

解 把 y 看成常量，对 x 求导数，（注意到其中 $\ln 3$ 为常数，其导数为 0）得

$$f'_x(x,y)=2x+2y,$$

把 x 看成常量，对 y 求导数，得

$$f'_y(x,y)=2x-3y^2.$$

在点(1,2)处的偏导数为

$$f'_x(1,2)=2\cdot 1+2\cdot 2=6,$$
$$f'_y(1,2)=2\cdot 1-3\cdot 2^2=-10.$$

例 4-16 设函数 $z=x^y\ (x>0)$，证明：$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$

证 把 y 看成常数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，

把 x 看成常数，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，

所以
$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}\cdot yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}\cdot x^y\ln x=x^y+x^y=2z.$$

类似的方法可求二元以上多元函数的偏导数.

例 4-17 求三元函数 $u=x^{\frac{y}{z}}$ 的偏导数.

解 将 y、z 看作常数，对 x 求导数，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}=\frac{y}{xz}x^{\frac{y}{z}},$$

同理
$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x\cdot\frac{1}{z}=\frac{\ln x}{z}x^{\frac{y}{z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)=\frac{-y\ln x}{z^2}x^{\frac{y}{z}}.$$



例 4-18 已知理想气体状态方程 $pV=RT$(R 为常量)，试证：

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$

证 因为

$$p=\frac{RT}{V},\quad \frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2};$$

$$V=\frac{RT}{p},\quad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p};$$

$$T=\frac{pV}{R},\quad \frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}.$$

所以

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1. \tag{4-8}$$

值得注意的是：对一元函数来说，导数$\frac{dy}{dx}$可看作函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 之商. 而式(4-8)表明，偏导数的记号“$\frac{\partial y}{\partial x}$”是一个整体记号，其中的横线没有相除的意义.

如果一元函数在某点可导，则它在该点必定连续. 但对于二元函数，即使在某点两个偏导数都存在，也不能保证它在该点连续. 例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点(0,0)处的两个偏导数

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{0}{(\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0}{0+(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0$$

都存在，但由第一节中例 4-13 知此函数在点(0,0)处不连续.

二、偏导数的几何意义

二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形是空间一张曲面. 设 $M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 是曲面上一点，过点 M 作平面 $y=y_0$，截此曲面得一条曲线：

$$\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}，即 z=f(x,y_0).$$

函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$，是一元函数 $z=f(x,y_0)$ 在 x_0 处的导数. 由一元函数导数的几何意义可知，偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 就是曲线 $z=f(x,y_0)$ 在点 M 处的切线 MT 关于 x 轴的斜率，即 $f'_x(x_0,y_0)=\tan\alpha$，其中 α 为切线 MT 与 x 轴正向间的夹角.

同理，$f'_y(x_0,y_0)$ 的几何意义就是曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线，即曲线 $z=f(x_0,y)$ 在点 M 处的切线 MS 关于 y 轴的斜率，即 $f'_y(x_0,y_0)=\tan\beta$，其中 β 为切线 MS 与 y 轴正向间的夹

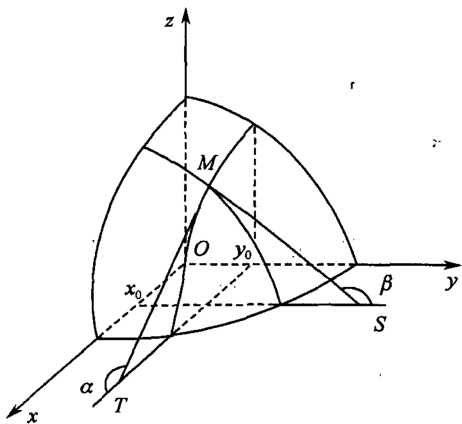


图 4-9

角(见图 4-9).

三、高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y).$$

这两个偏导数在区域 D 内都是 x、y 的二元函数. 如果这两个函数的偏导数也存在，则称这两个函数的偏导数为原来函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数. 依照对变量求导次序的不同，而有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

其中$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$称为**二阶混合偏导数**. 如果二阶偏导数也具有偏导数，则称为原来函数的三阶偏导数. 一般地，函数 $z=f(x,y)$ 的 $n-1$ 阶偏导数的偏导数称为函数 $z=f(x,y)$ 的 n 阶偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**(**higher-order partial derivatives**).

例 4-19 设 $z=x^2e^y+x^3y^2-xy+2$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$和$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^y+3x^2y^2-y$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2e^y+2x^3y-x$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2e^y+6xy^2$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xe^y+6x^2y-1$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2xe^y+6x^2y-1$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^y+2x^3$，

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=6y^2$.

在这个例子中，两个混合偏导数相等，即$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，这不是偶然的. 事实上，我们有下述定理.

定理 4-1 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域 D 内连续，则在区域 D 内有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

这个定理说明，只要两个混合偏导数连续，那么，它们与求导次序无关. 因为二元初等函数在其定义区域内是连续的，所以若函数 $z=f(x,y)$ 为二元初等函数，则混合偏导数与求导次序无关.

例 4-20 验证函数 $z=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$



证 由 $z=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x=-\frac{x}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

同理

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{(x^2+y^2)-y(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

四、全微分

前面我们曾经讨论了一元函数的增量与微分的关系，即如果一元函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，则当自变量有增量 Δx 时，函数的增量为

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+o(\Delta x),$$

我们称其中的 $f'(x)\Delta x$ 为函数的微分 $\mathrm{d}y$. 当 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y\approx \mathrm{d}y$.

对于二元函数 $z=f(x,y)$，如果自变量 x 和 y 分别有增量 Δx 和 Δy 时，对应的函数的增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

叫做函数 $z=f(x,y)$ 的**全增量**.

通常求全增量是比较困难的，与一元函数的情形一样，我们希望用自变量的增量 Δx、Δy 的线性函数来近似代替函数的全增量 Δz，请看下面的例子.

例 4-21 已知矩形的边长为 x 与 y，当边长 x 与 y 分别由 x_0、y_0 变为 $x_0+\Delta x$、$y_0+\Delta y$ 时（见图 4-10），研究矩形面积 S 的全增量表达式.

解 矩形面积为 $S=xy$，于是矩形面积 S 的全增量为

$$\begin{aligned}\Delta S&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)-x_0y_0\\&=(y_0\Delta x+x_0\Delta y)+\Delta x\Delta y.\end{aligned}$$

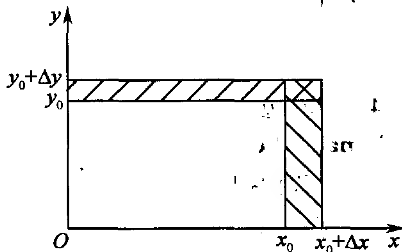


图 4-10

图 4-10 中阴影部分面积即是全增量 ΔS. 它由两部分组成，第一部分 $y_0\Delta x+x_0\Delta y$ 是 Δx、Δy 的线性函数；第二部分 $\Delta x\Delta y$（图 4-10 右上角部分），当 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$ 时，是比 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 高阶的无穷小. 因此，当 Δx、Δy 都足够小时，全增量 ΔS 可由 $y_0\Delta x+x_0\Delta y$ 近似表示，此式中 Δx、Δy 的系数恰是函数 $S=xy$ 分别对 x、y 的偏导数，类似于一元函数微分概念，可定义 $y_0\Delta x+x_0\Delta y$ 为二元函数 $S=xy$ 在点 (x_0,y_0) 处的全微分. 从而引入如下二元函数全微分定义.

定义 4-5 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有定义，当自变量 x 和 y 分别有增量 Δx 和 Δy 时，相应的函数全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho). \tag{4-9}$$

其中 A、B 与 Δx、Δy 无关，而仅与 x、y 有关，$o(\rho)$ 是当 $\rho\to 0$ 时比 ρ 高阶的无穷小（$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$），则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的**全微分**（**total differential**），记作 $\mathrm{d}z$，即

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

与一元函数类似，全微分是 Δx、Δy 的线性函数，它与 Δz 只相差一个比 ρ 高阶的无穷小，所以也称 dz 是 Δz 的线性主部. 当 $|\Delta x|$、$|\Delta y|$ 很小时，可用全微分 dz 作为函数全增量 Δz 的近似值.

下面讨论函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分的条件.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y .$$

事实上，因为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分，按照可微分的定义

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

对任何 Δx、Δy 都成立，因此，固定 y，即当 $\Delta y=0$ 时，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2}=|\Delta x|$，则(4-9)式成为

$$\Delta z = f(x+\Delta x,y) - f(x,y) = A\Delta x + o(|\Delta x|).$$

两边除以 Δx 再取极限，则偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x + o(|\Delta x|)}{\Delta x} = A.$$

即 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 存在，且 $\frac{\partial z}{\partial x}=A$；同理，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在且 $\frac{\partial z}{\partial y}=B$，

故
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

与一元函数类似，把自变量的增量叫做自变量的微分，即 $\Delta x = dx$，$\Delta y = dy$，所以全微分又可写成

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{4-10}$$

式(4-10)右边的第一项是函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导数与 dx 的乘积，称为函数关于 x 的**偏微分(partial differential)**，第二项称为函数关于 y 的偏微分.

通常我们把二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和这件事，称为二元函数的微分符合叠加原理.

叠加原理也适用于二元以上的函数. 例如，如果三元函数 $u=f(x,y,z)$ 可微分，那么，它的全微分等于它的三个偏微分之和，即

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

在一元函数中，可导与可微是等价的，但对二元函数来说，偏导数存在，函数不一定可微. 但是如果再假定函数的各个偏导数连续，则可以证明函数是可微的，即有下面结论：

如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续，则函数在该点可微.

本章所涉及到的二元函数，一般都是初等函数，满足偏导数连续条件，因此对二元初等函数来说它是可微的.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，则它在该点必连续.

这是因为，如果 $z=f(x,y)$ 可微，于是

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho).$$



当 $\Delta x \to 0$，$\Delta y \to 0$ 时，有 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$

从而
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0,$$
所以函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续.

以上关于二元函数的全微分定义及全微分存在的充分条件，完全可以推广到多元函数.

例 4-22　求函数 $z=e^{2x+y^2}$ 的全微分.

解　由于
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$
而
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2ye^{2x+y^2},$$
所以
$$dz=2e^{2x+y^2}dx+2ye^{2x+y^2}dy.$$

例 4-23　求函数 $z=x^y$ 在点 $(2,3)$ 处当 $\Delta x=0.1$，$\Delta y=0.2$ 时的全微分及全增量.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\ y=3}}=12$，　$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\ y=3}}=8\ln 2.$

所以在点 $(2,3)$ 处当 $\Delta x=0.1$，$\Delta y=0.2$ 时
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=12\times 0.1+8\ln 2\times 0.2=1.2+1.6\ln 2\approx 2.309$$
$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=(2+0.1)^{3+0.2}-2^3=(2.1)^{3.2}-2^3\\&\approx 10.7424-8=2.7424.\end{aligned}$$

例 4-24　求函数 $u=x+\sin\dfrac{y}{2}+y^2z^3$ 的全微分.

解　因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{y}{2}+2yz^3$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=3y^2z^2$，

所以
$$du=dx+\left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+2yz^3\right)dy+3y^2z^2dz.$$

【思考与练习】

1. 求 $f'_x(x_0,y_0)$ 时能否先将 $y=y_0$ 代入 $f(x,y)$ 中，再对 x 求导数，也就是 $f'_x(x_0,y_0)=\left.\dfrac{d}{dx}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$？
2. 二元函数 $z=f(x,y)$ 在某点可微分，那么它在该点的两个一阶偏导数是否一定存在？反之呢？
3. 二元函数 $z=f(x,y)$ 在某点的两个一阶偏导数存在，该函数在这点是否连续？反之呢？

第三节　多元函数微分法

一、复合函数微分法

设函数 $z=f(u,v)$，而 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 是变量 x、y 的函数，则
$$z=f[u(x,y),v(x,y)]$$
是变量 x、y 的**二元复合函数**（函数的复合关系见图 4-11），其

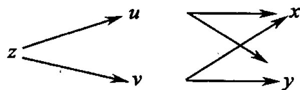


图 4-11

中 u、v 叫中间变量，x、y 叫自变量. 关于二元复合函数偏导数有如下定理：

定理 4-2 如果函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 处有连续偏导数，而函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处有连续偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x,y) 处就有对 x 及 y 的连续偏导数，且可由下列公式求出偏导数.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{4-11}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4-12}$$

从图 4-11 可见变量 z 到 x 有两条路线，因此求 z 对 x 的偏导数时，只需沿着每条线按一元函数求导法则求导数，再相加便得到式(4-11). 同理可得到式(4-12). 这就是多元复合函数求导时的锁链法则. 这个法则对中间变量或自变量多于或少于两个的情形仍是适用的. 例如以下几种形式：

1. 两个中间变量是一元函数的情形

设函数 $z=f(u,v)$，而 $u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$，则 $z=f[\varphi(x),\psi(x)]$ 是 x 的一元函数，函数的复合关系见图 4-12. 这时 z 对 x 的导数称为**全导数(total derivative)**，且

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}. \tag{4-13}$$

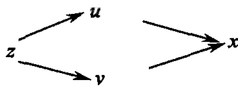


图 4-12

2. 三个中间变量是一元函数的情形

对于含有多于两个中间变量的复合函数，式(4-13)结论仍成立. 如图 4-13 所示的函数关系

$$u=f(x,y,z)，而 x=\varphi(t)，y=\psi(t)，z=\omega(t)，$$

则复合函数 $u=f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]$ 的全导数

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \tag{4-14}$$

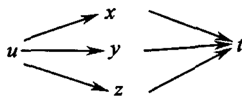


图 4-13

3. 一个中间变量两个自变量的情形

$z=f(u)$，而 $u=u(x,y)$，函数的复合关系见图 4-14. 则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4-15}$$

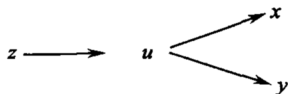


图 4-14

此外，还有中间变量、自变量多于或少于两个的其他情形. 如三个中间变量，三个自变量；二个中间变量，三个自变量等等.

例 4-25 设 $z=u^2\ln v$，$u=\dfrac{x}{y}$，$v=3x-2y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 此函数复合结构如图 4-11，由式(4-11)、式(4-12)得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{y^2(3x-2y)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{u^2}{v}\cdot(-2)$$

$$=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}.$$

例 4-26 设 $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$，$f(u)$ 为可微函数，证明：

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$



证明　令 $u=\frac{y}{x}$，则 z 是以 u 为中间变量，x、y 为自变量的二元复合函数，其复合关系见图 4-14. 由式(4-15)得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u},$$

于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}+\frac{y}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=0.$$

例 4-27　设 $z=e^{uv}$，而 $u=\sin x$，$v=x^2\cos x$，求全导数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解　此函数复合结构如图 4-12，由公式(4-13)，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\\&=ve^{uv}\cos x+ue^{uv}(2x\cos x-x^2\sin x)\\&=x^2\cos^2 xe^{x^2\sin x\cos x}+(2x\sin x\cos x-x^2\sin^2 x)e^{x^2\sin x\cos x}\\&=(x^2\cos 2x+x\sin 2x)e^{\frac{1}{2}x^2\sin 2x}\end{aligned}$$

例 4-28　设 $z=\arctan(xy)$，而 $y=e^x$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

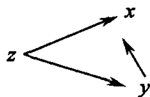


图 4-15

解　函数的复合关系见图 4-15.

方法一　用二元复合函数的锁链法则，得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{1+x^2y^2}+\frac{x}{1+x^2y^2}\cdot e^x=\frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}.$$

方法二　将 $y=e^x$ 直接代入 $z=\arctan(xy)$ 中，得一元复合函数 $z=\arctan(xe^x)$，用一元复合函数的求导法则，得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=[\arctan(xe^x)]'=\frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}.$$

在方法一中注意 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 的区别，前者是全导数，这时 z 是 x 的一元函数；后者是 z 对 x 的偏导数，这时 z 是 x、y 的二元函数.

例 4-29　设 $w=f(x+y+z,xyz)$，求 $\frac{\partial w}{\partial x}$.

解　记 $u=x+y+z$，$v=xyz$，则

$$w=f(u,v).$$

此函数复合结构如图 4-16，于是

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}+yz\frac{\partial w}{\partial v}.$$

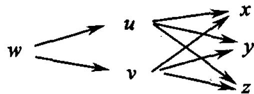


图 4-16

对一元函数 $y=f(x)$，若微分存在，无论 x 是自变量还是中间变量，总有 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，多元函数也有类似的性质.

根据式(4-11)、(4-12)及(4-10)可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

由此可见，无论把 z 当成自变量 x、y 的函数还是当成中间变量 u、v 的函数，它们的全微分形式相同. 即，对于函数 $z=f(u,v)$，无论 u、v 是自变量还是中间变量，$z=f(u,v)$ 的全微分形式总是

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

这个性质叫做**多元函数(一阶)微分形式不变性**.

二、隐函数微分法

在讨论一元函数的微分法时，曾介绍过用复合函数的求导法则求由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数$\frac{dy}{dx}$，下面通过多元函数求偏导数的方法，给出隐函数的求导公式.

设函数 $F(x,y)$ 有连续的偏导数，且$\frac{\partial F}{\partial y}\neq0$，则由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的可导函数 $y=f(x)$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{4-16}$$

事实上，把由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 代回原方程，得恒等式

$$F[x,f(x)]\equiv0.$$

上式左端可看作是 x 的复合函数，恒等式两端同时对 x 求全导数仍为恒等式，即得：

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

于是解得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

对三元方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$，也可采用同样方法得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}\quad (F'_z\neq0). \tag{4-17}$$

例 4-30 设由方程 $y-xe^y+x=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，试求$\frac{dy}{dx}$.

解 令

$$F(x,y)=y-xe^y+x=0,$$

由

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-e^y+1,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=1-xe^y\neq0,$$

得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-e^y+1}{1-xe^y}=\frac{e^y-1}{1-xe^y}.$$

例 4-31 设由方程 $e^{-xy}-2z+e^z=0$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$，试求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $F(x,y,z)=e^{-xy}-2z+e^z$，

则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-ye^{-xy},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-xe^{-xy},\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-2+e^z.$$

由(4-17)式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}.$$



【思考与练习】

1. 设 $z=e^{2x-3y+6t}$，$x=t^2$，$y=4t$，则 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 与 $\frac{dz}{dt}$ 是否相同？

2. 设 $z=u+v$，$u=2x$，$v=x+y$，那么 $dz=du+dv$，$dz=3dx+dy$，哪一个是 z 的全微分？

3. 函数的全增量与全微分有什么关系？

第四节　多元函数的极值

一、二元函数的极值

前面我们曾用导数求过一元函数的极值问题，在这里我们应用偏导数来讨论多元函数的极值问题，讨论时以二元函数的极值为主.

定义 4-6　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义，对于该邻域内异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y)，如果都有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0) \text{或} f(x,y)>f(x_0,y_0),$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得**极大值或极小值**（统称**极值**）$f(x_0,y_0)$；称点 (x_0,y_0) 为**极大值点或极小值点**（统称**极值点**）.

有些函数的极值可从函数的图形看出. 例如，函数 $z=x^2+y^2+1$，它的图形为开口向上的旋转抛物面（见图 4-17），显然在点 $(0,0)$ 处函数取得极小值 1；函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的图形为球心在原点，半径为 R 的上半球面，显然在 $(0,0)$ 点取得极大值 R.

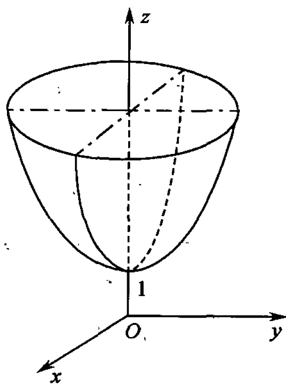


图 4-17

下面给出二元函数取得极值的条件.

定理 4-3（极值存在的必要条件）　如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极值，且函数在该点的一阶偏导数存在，那么，

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0.$$

证　因为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极值，如果令 $y=y_0$，则一元函数 $z=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值. 根据一元函数取得极值的必要条件，有

$$f'_x(x_0,y_0)=0.$$

同理可证

$$f'_y(x_0,y_0)=0.$$

使得 $f'_x(x_0,y_0)=0$ 和 $f'_y(x_0,y_0)=0$ 同时成立的点 (x_0,y_0) 称为函数 $z=f(x,y)$ 的**驻点**.

由定理 4-3 知道，偏导数存在的二元函数的极值点必定是驻点，但函数的驻点不一定是极值点. 例如，函数 $z=f(x,y)=xy$，它的驻点易求得是 $(0,0)$，但由于函数 $z=xy$ 在点 $(0,0)$ 的函数值为 0，而点 $(0,0)$ 邻近的函数值既可取得正值，也可取得负值，所以点 $(0,0)$ 不是极值点.

驻点只是偏导数存在的二元函数取得极值的必要条件而非充分条件，那么，应如何判定驻点是否为函数的极值点呢？下面定理给出二元函数取得极值的充分条件.

定理 4-4（极值存在的充分条件）　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有一阶与二阶连续偏导数，又设 $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$，记 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，那么

(1) 如果 $B^2-AC<0$，则函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极值，且当 $A<0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 是

极大值；当 $A>0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 是极小值；

（2）如果 $B^2-AC>0$，则点 (x_0,y_0) 不是极值点；

（3）如果 $B^2-AC=0$，则 (x_0,y_0) 是否为极值点不能断定，需另作讨论.

例 4-32 求函数 $z=f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解 解方程组 $\begin{cases} f'_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f'_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$，

得驻点：$(1,0)$、$(1,2)$、$(-3,0)$、$(-3,2)$.

又 $f''_{xx}(x,y)=6x+6$，$f''_{xy}(x,y)=0$，$f''_{yy}(x,y)=-6y+6$.

依据定理 4-4 列表讨论极值如下：

驻　点	A	B	C	B^2-AC	极　值
(1,0)	12	0	6	-72	极小值 -5
(1,2)	12	0	-6	72	不是极值
(-3,0)	-12	0	6	72	不是极值
(-3,2)	-12	0	-6	-72	极大值 31

如果函数 $z=f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，则它在 D 上必能取得最大值和最小值. 假定函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上连续且可微分同时只有有限个驻点，类似于一元函数，将函数 $z=f(x,y)$ 在 D 内的所有驻点处的函数值及在 D 的边界上的最大值和最小值进行比较，其中最大的就是函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上的最大值，最小的就是最小值.

例 4-33 求函数 $z=f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 在圆域 $x^2+y^2\leq 1$ 上的最大值.

解 令 $f'_x(x,y)=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}=0$，$f'_y(x,y)=-\dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}=0$

得驻点 $(0,0)$，而 $f(0,0)=2$.

函数 $z=f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 在圆域边界 $x^2+y^2=1$ 上的值恒等于 $\sqrt{3}$，又 $2>\sqrt{3}$. 故函数在圆域 $x^2+y^2\leq 1$ 上的最大值为 2.

在实际问题中，遇到求二元函数的最大值和最小值问题时，如果根据具体问题的性质，知道函数 $z=f(x,y)$ 的最大值（或最小值）只能在区域 D 内部取得，而函数在 D 内只有唯一的一个驻点，那么该驻点处的函数值必定是函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上的最大值（或最小值）.

例 4-34 要用铁皮做一个体积为 2 立方米的有盖长方体水箱，问怎样选择长、宽、高，才能使用料最省？

解 设水箱长 x 米，宽 y 米，则其高为 $\dfrac{2}{xy}$ 米，长方体表面积为

$$A=2\left(xy+y\frac{2}{xy}+x\frac{2}{xy}\right)=2xy+\frac{4}{x}+\frac{4}{y},\qquad (x>0,y>0)$$

求偏导，得

$$\frac{\partial A}{\partial x}=2y-\frac{4}{x^2},\quad \frac{\partial A}{\partial y}=2x-\frac{4}{y^2}.$$

解方程组 $\begin{cases} 2y-\dfrac{4}{x^2}=0 \\ 2x-\dfrac{4}{y^2}=0 \end{cases}$，得 $\begin{cases} x_2=\sqrt[3]{2} \\ y_2=\sqrt[3]{2} \end{cases}$

根据题意可知，水箱用料函数 A 的最小值一定存在，且 $x>0$，$y>0$. 又函数 A 在该范



围内只有一个驻点$(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$，因此，当$x=y=\sqrt[3]{2}$时，$A$取得最小值，此时，高$=\frac{2}{xy}=\frac{2}{(\sqrt[3]{2})^2}=\sqrt[3]{2}$. 即当长、宽、高都等于$\sqrt[3]{2}$时，水箱用料最省，最少用料为$6\sqrt[3]{2^2}$平方米.

二、条件极值

在前面求二元函数极值的讨论中，两个自变量x与y是相互独立的，此时的极值称为**无条件极值**，简称极值. 如果自变量x与y之间还要受条件方程$g(x,y)=0$的制约，这时的极值问题称为**条件极值**.

求条件极值的一种方法是，可从约束条件中解出一些自变量使其由其他自变量表示出来，代入所讨论的函数表达式中去，把条件极值问题转化为无条件极值问题（参见例4-34）. 另一种方法是直接求条件极值，即**拉格朗日乘数法**，它是解决条件极值问题的有效方法. 其求法步骤如下：

（1）用常数λ（称为**拉格朗日乘数**）乘以$g(x,y)$，并与$f(x,y)$相加，得函数$F(x,y)$（称为**拉格朗日函数**），即

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y);$$

（2）分别求$F(x,y)$对x与对y的偏导数，并解下列方程组

$$\begin{cases}F'_x=f'_x+\lambda g'_x=0\\F'_y=f'_y+\lambda g'_y=0\\g(x,y)=0;\end{cases}$$

得(x_0,y_0,λ_0)，其中点(x_0,y_0)称为条件驻点；

（3）根据问题性质判别(x_0,y_0)是否为条件极值点.

例 4-35　某工厂计划生产两种型号的仪器，其产量分别为x和y台，所需成本为z，且z与x和y的函数关系为：$z(x,y)=x^2+2y^2-xy$（单位：万元）. 现需要这两种仪器共8台，问应如何安排生产，才能使成本最小？

解　本题是求函数$z(x,y)=x^2+2y^2-xy$在约束条件$x+y-8=0$下的最小值.

（1）构造拉格朗日函数　$F(x,y)=x^2+2y^2-xy+\lambda(x+y-8)$；

（2）分别求$F(x,y)$对x、y的偏导数，令其为零，并解下列方程组

$$\begin{cases}F'_x=2x-y+\lambda=0\\F'_y=4y-x+\lambda=0\\x+y-8=0\end{cases}$$

得$x=5$，$y=3$，$\lambda=-7$；

（3）由于实际问题的最小值存在，且$x=5$，$y=3$，是$F(x,y)$的唯一驻点. 因此，$x=5$，$y=3$，是所求问题的最小值点. 当两种型号的仪器各生产5台和3台时，总成本z最小，最小成本为

$$z(5,3)=5^2+2\times3^2-5\times3=28（万元）.$$

拉格朗日乘数法也可推广到n元函数且有$m(m<n)$个约束条件的极值问题. 设有n元函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$满足约束条件

$$g_j(x_1,x_2\cdots x_n)=0\qquad(j=1,2,\cdots,m),$$

令

$$F=f+\lambda_1g_1+\lambda_2g_2+\cdots+\lambda_mg_m,$$

并求$\frac{\partial F}{\partial x_i}=0(i=1,2,\cdots,n)$与条件$g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0(j=1,2,\cdots,m)$组成的联立方程组的解$(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$，最后根据实际问题去判断点$(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$是否为最大（小）值点.

【思考与练习】

1. 对于一元函数，一阶导数不存在的点可能是函数极值点；对于二元函数，一阶偏导数不存在的点是否也可能是函数极值点？
2. 设(x_0,y_0)是函数$f(x,y)$的一个驻点，若不用极值存在的充分条件判定，应如何判定(x_0,y_0)是否为极值点？

*第五节 二重积分

在一元函数积分学中我们知道，定积分是某种确定形式和的极限。这种和的极限推广到定义在区域上二元函数的情形，便得到二重积分的概念. 本章将介绍二重积分的概念、计算法以及它们的一些应用.

一、二重积分的概念与性质

1. 曲顶柱体的体积

设$z=f(x,y)$是定义在xOy平面上有界闭区域D上的非负连续函数，它在空间中表示一个曲面S. 把以S为顶、D为底、而侧面是以D的边界曲线为准线且母线平行于z轴的柱面，叫做曲顶柱体(见图4-18). 现在我们来讨论如何定义并计算上述曲顶柱体的体积V. 我们知道，平顶柱体的体积可以用公式

体积 = 高 × 底面积

来计算. 对于曲顶柱体，当点(x,y)在区域D上变动时，其高$z=f(x,y)$是个变量，因此它的体积不能直接用上面的公式来计算. 但我们可以仿照一元函数求曲边梯形面积时所采用的“分割、近似、求和、取极限”的步骤来解决.

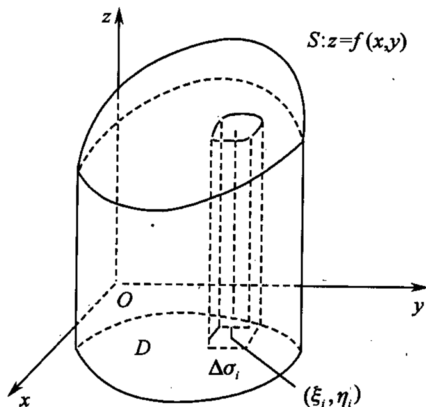


图 4-18

(1) 分割：用一组曲线网把D任意分成n个小区域

$$\Delta\sigma_1、\Delta\sigma_2、\cdots、\Delta\sigma_n,$$

并用$\Delta\sigma_i$表示第i个小区域面积；分别以这些小区域的边界曲线为准线，作母线平行于z轴的柱面，这些柱面把原来的曲顶柱体分成了n个细曲顶柱体$\Delta V_1、\Delta V_2、\cdots、\Delta V_n$，且用$\Delta V_i$表示第$i$个细曲顶柱体的体积.

(2) 近似：当这些小区域的直径(一个区域的直径是指该区域上任意两点间距离的最大值)很小时，由于函数$z=f(x,y)$连续，对同一个小区域来说，$f(x,y)$变化很小，这时细曲顶柱体可近似看作平顶柱体. 在每个小区域$\Delta\sigma_i$中任取一点(ξ_i,η_i)，以$f(\xi_i,\eta_i)$为高，底为$\Delta\sigma_i$的细平顶柱体的体积为$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，且有

$$\Delta V_i\approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

(3) 求和：这n个细平顶柱体体积$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$之和可以认为是整个曲顶柱体体积的近似值. 即

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

(4) 取极限：显然，区域D分得越细，这个近似值就越接近曲顶柱体体积V. 令这n个小区域直径的最大值λ趋于零，若上述和式的极限存在，此极限值就是所求曲顶柱体的



体积 V，即

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

2. 二重积分的概念

在前面我们用分割、近似、求和、取极限的方法求出了曲顶柱体的体积，还有许多实际问题，如求不均匀薄片的质量等，都可以用这种方法予以解决. 抽去具体问题的实际意义，可给出二重积分的定义：

定义 4-7 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，将 D 任意分成 n 个小区域

$$\Delta\sigma_1、\Delta\sigma_2、\cdots、\Delta\sigma_n,$$

仍以 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示第 i 个小区域的面积，在每个小区域上任取一点 (ξ_i,η_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$，并作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 如果当各个小区域的直径的最大值 λ 趋于零时，这和式的极限存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

其中 $f(x,y)$ 称为**被积函数**，“$\iint\limits_D$”称为**二重积分号**，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 称为**被积表达式**，$\mathrm{d}\sigma$ 称为**面积元素**，x 和 y 称为**积分变量**，D 称为**积分区域**.

在上述定义中，由于对 D 的分割是任意的，因此，当取两边分别平行于坐标轴的矩形作为小区域 $\Delta\sigma_i$ 时，以 Δx、Δy 表示小矩形的边长，其面积为 $\Delta x\Delta y$，于是面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 可用 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示，故二重积分又可记为

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 称为直角坐标系中的面积元素.

根据二重积分的定义，前面所讨论的曲顶柱体的体积是曲顶面 $z=f(x,y)$ 在底面 D 上的二重积分

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

二重积分的几何意义是：若在积分区域 D 上 $f(x,y)\geqslant 0$，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示以 D 为底、以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

3. 二重积分的性质

二重积分具有与一元函数定积分类似的性质，现叙述如下：

性质 4-1 被积函数的常数因子可以提到二重积分号的外面，即

$$\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.\qquad (k\text{ 为常数})$$

性质 4-2 有限个函数的和(或差)的二重积分等于各个函数的二重积分的和(或差). 例如

$$\iint\limits_D[f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 4-3 如果闭区域 D 被有限条曲线分为有限个部分闭区域，则在 D 上的二重积分等于各个部分闭区域上的二重积分的和。例如 D 分为两个闭区域 D_1 与 D_2，如图 4-19 所示，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

即二重积分对于区域具有可加性.

性质 4-4 如果在 D 上，$f(x,y)=1$，σ 为 D 的面积，则

$$\sigma = \iint_D 1\cdot\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma.$$

它的几何意义是：高为 1 的平顶柱体的体积在数值上等于柱体的底面积。

图 4-19

性质 4-5 如果在 D 上总有 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

性质 4-6 设 M、m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ 是 D 的面积，则有

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma.$$

性质 4-7（二重积分的中值定理） 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，σ 是区域 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma.$$

该性质的几何意义为：空间中任意一个曲顶柱体的体积必等于一个以 D 为底、D 上某点 (ξ,η) 处函数值 $f(\xi,\eta)$ 为高的平顶柱体的体积.

二、二重积分的计算

按照二重积分的定义来计算二重积分，只对少数特别简单的被积函数和积分区域可行. 在大多数情况下，二重积分可划为两次单积分来计算. 下面分别讨论在直角坐标系和极坐标系下二重积分的计算方法.

1. 直角坐标系下二重积分的计算

设平面区域 D 由两条直线 $x=a$、$x=b$ 及两条曲线 $y=\varphi_1(x)$、$y=\varphi_2(x)$（$\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$）所围成，这样的区域 D 称为 **x 型区域**（图 4-20）.

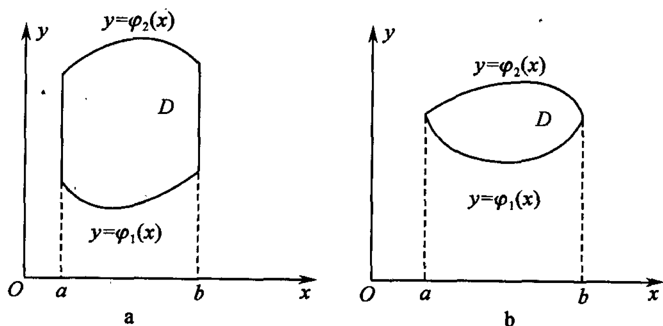


图 4-20

设平面区域 D 由两条直线 $y=c$、$y=d$ 及两条曲线 $x=\psi_1(y)$、$x=\psi_2(y)$（$\psi_1(x)\leqslant\psi_2(x)$，$c\leqslant y\leqslant d$）所围成，这样的区域 D 称为 **y 型区域**（图 4-21）.

（1）D 为 x 型区域的二重积分的计算



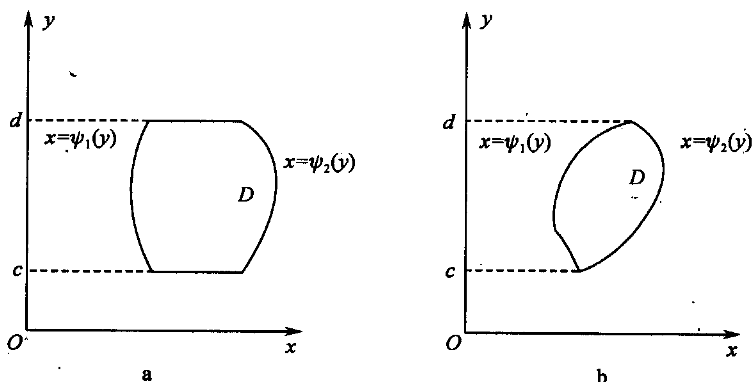


图 4-21

由二重积分的几何意义，当$f(x,y)\geqslant 0$时，二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$表示一个以区域$D$为底，以曲面$z=f(x,y)$为顶的曲顶柱体的体积$V$.

设积分区域D是x型区域，此时，D的边界曲线与平行于y轴的直线至多有两个交点(在边界$x=a$、$x=b$处可以除外)，见图 4-20.

在区间$[a,b]$上任取一点x，过点x作垂直于x轴(平行于yOz平面)的平面，它与曲顶柱体相截得到一个以区间$[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]$为底边、以曲线$z=f(x,y)$(对任意固定的$x$,该曲线是关于变量$y$的一元函数曲线并在曲面$z=f(x,y)$上)为曲边的曲边梯形(见图 4-22)，它的面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

下面应用定积分的微元法求这个曲顶柱体的体积V.

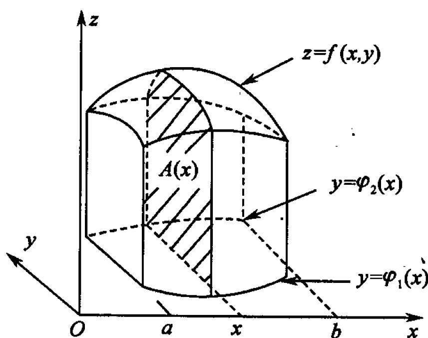


图 4-22

由上述结论可知，对于区间$[a,b]$上任一点x，都有曲顶柱体上的一个截面面积$A(x)$与之对应. 用平行于yOz面的一族平面把曲顶柱体的体积分成许多小薄片体，同时也把区间$[a,b]$分成许多小区间. 考虑区间$[x,x+dx]$上的小薄片体，由于dx很小，该小薄片体可看成厚度为dx、底面积为$A(x)$的一个柱体，它的体积微元为$dV=A(x)dx$. 于是，体积微元$dV=A(x)dx$在区间$[a,b]$上的定积分$\int_a^b A(x)\,dx$就是所求曲顶柱体的体积V. 即

$$V=\int_a^b A(x)\,dx=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx.$$

这个体积也就是所求的二重积分，从而

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx.$$

上式右端是一个先对y、再对x的**二次积分**. 首先把$f(x,y)$看作y的一元函数(x为常数)，并对y计算从$\varphi_1(x)$到$\varphi_2(x)$的定积分；然后把算得的结果(是x的函数)从a到b计算定积分. 这个先对y、再对x的二次积分也常记作

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \tag{4-18}$$

在上述讨论中，我们假定了$f(x,y)\geqslant 0$. 但实际上公式(4-18)的成立并不受此条件

限制.

例 4-36 计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 以及 $x=y^2$ 所围成的区域(见图 4-23).

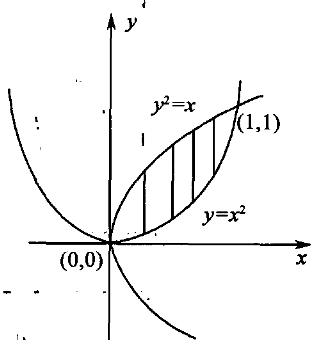


图 4-23

解 将 D 视为 x 型区域. 先积 y 后积 x，用平行于 y 轴的直线从下到上(沿 y 轴正向)穿过区域 D，首先穿过的曲线 $\varphi_1(x)=x^2$，其次穿过的曲线 $\varphi_2(x)=\sqrt{x}$；解方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$ 得交点(0,0)和(1,1). 即 $0\leqslant x\leqslant 1$，$x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$，因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1\left(x^2\sqrt{x}+\frac{(\sqrt{x})^3}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{21}x^7\right)\Bigg|_0^1=\frac{6}{35}.\end{aligned}$$

计算重积分时确定积分上下限非常重要，一般的做法是：首先划出积分区域 D 的图形，D 若是 x 型区域，即二次积分为先积 y 后积 x，用上述例题的方法作平行于 y 轴的直线从下到上(沿 y 轴正向)穿过区域 D，直线先穿过的曲线为 $\varphi_1(x)$，后穿过的曲线为 $\varphi_2(x)$，从而确定了 y 的上下限，$y_{下}=\varphi_1(x)$，$y_{上}=\varphi_2(x)$，也就是 $\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$；其次，解方程组 $\begin{cases} y=\varphi_1(x) \\ y=\varphi_2(x) \end{cases}$，得交点 $(a,\varphi_1(a))$，$(b,\varphi_1(b))$，于是，第二次积分上下限为 b 与 a，即 $a\leqslant x\leqslant b$. x 型区域 D 也常常用下面不等式表示：

$$\begin{cases} \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x) \\ a\leqslant x\leqslant b \end{cases}$$

(2) D 为 y 型区域的二重积分的计算

类似地，如果积分区域 D 为 y 型区域，$x_{左}=\psi_1(y)$，$x_{右}=\psi_2(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$，用不等式

$$\begin{cases} \psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y) \\ c\leqslant y\leqslant d \end{cases}$$

来表示，其中 $\psi_1(y)$ 和 $\psi_2(y)$ 连续，此时 D 的边界曲线与平行于 x 轴的直线至多有两个交点(在边界 $y=c$、$y=d$ 处可除外)，见图 4-21，那么有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{4-19}$$

例 4-37 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D(D_1\cup D_2)$ 是由抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成(见图 4-24).

解 解方程组 $\begin{cases} y^2=x \\ y=x-2 \end{cases}$，得交点 $(1,-1)$ 和 $(4,2)$. 由图 4-24 可见，积分区域 D 可用不等式 $\begin{cases} y^2\leqslant x\leqslant y+2 \\ -1\leqslant y\leqslant 2 \end{cases}$ 表示，利用公式(4-19)得

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2} xy\mathrm{d}x=\int_{-1}^2\left(\frac{1}{2}x^2y\right)\Bigg|_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y$$



$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(4y+4y^2+y^3-y^5)\,\mathrm{d}y=\frac{45}{8}.$$

上述的二次积分为先积 x 后积 y，类似于 x 型区域二次积分确定上下限的方法，作平行于 x 轴的直线从左到右（沿 x 轴正向）穿过区域 D，直线先穿过的曲线为 $x_{左}=\psi_1(y)=y^2$，后穿过的曲线 $x_{右}=\psi_2(y)=y+2$，从而确定了 x 的上下限，即 $y^2\leqslant x\leqslant y+2$. 第二次积分 y 的上下限可由解方程组所得的交点 y 的坐标来确定，它也是将区域 D 向 y 坐标轴投影所得到点 y 的变化范围.

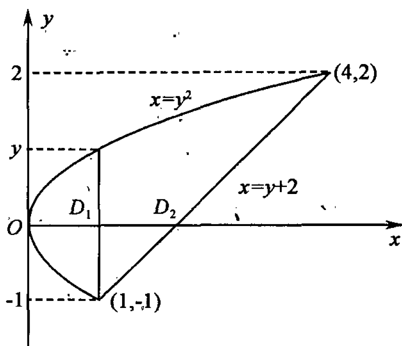


图 4-24

由本题积分区域图形（图 4-24）可知，要利用公式（4-18）来计算，需先将 D 分成两个部分区域：

$$D_1:\begin{cases}-\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\\0\leqslant x\leqslant 1\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}x-2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\\1\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

再利用二重积分性质 3 来计算，读者可自行计算（比题中的解法要麻烦）.

如果积分区域 D 既可用不等式 $\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$ 表示；又可用不等式 $\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$ 表示（积分区域 D 既是 x 型区域又是 y 型区域），则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

例 4-36 就是这种情况.

如果平行于坐标轴的直线与积分区域边界的交点多于两点，即积分区域 D 既不是 x 型区域又不是 y 型区域（如图 4-25 所示），可将区域 D 适当地分成几个部分区域，使每个部分区域为 x 型区域或 y 型区域. 再利用二重积分的性质 3，将这些部分区域上的二重积分相加，即可求出 D 上的积分值.

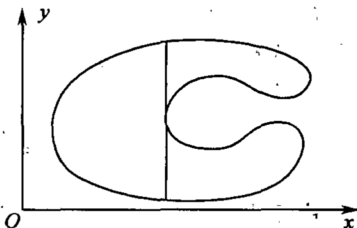


图 4-25

例 4-38 计算 $\iint_D\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D(D_1\cup D_2)$ 是由双曲线 $xy=1$、直线 $y=x$ 和 $y=2$ 所围成的区域（图 4-26）.

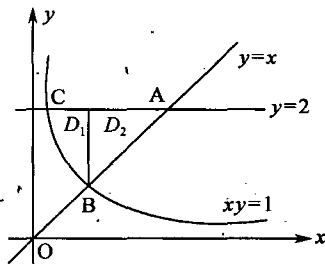


图 4-26

解法一 先 y 后 x 积分.

积分区域 D 不是 x 型区域.

分别解方程组 $\begin{cases}y=2\\y=x\end{cases}$，$\begin{cases}xy=1\\y=x\end{cases}$，$\begin{cases}xy=1\\y=2\end{cases}$ 得交点 $A(2,2)$，$B(1,1)$，$C\left(\frac{1}{2},2\right)$.

将图 4-26 中积分区域 D 分割成两个区域：

$$D_1:\begin{cases}\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant 2\\\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases},\qquad D_2:\begin{cases}x\leqslant y\leqslant 2\\1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}.$$

由二重积分性质 3 得

$$\iint_D\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0.5}^{1}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^2\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y$$



$$= \int_{0.5}^{1}\left(-\frac{x^2}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{2}dx + \int_{1}^{2}\left(-\frac{x^2}{y}\right)\Bigg|_{x}^{2}dx = \int_{0.5}^{1}\left(-\frac{x^2}{2}+x^3\right)dx + \int_{1}^{2}\left(-\frac{x^2}{2}+x\right)dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0.5}^{1} + \left(-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2} = -\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{48}-\frac{1}{64}-\frac{8}{6}+2+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{27}{64}.$$

解法二 先 x 后 y 积分.

积分区域 D 是 y 型区域. 且 D 可表示成：$\begin{cases}\frac{1}{y}\leqslant x\leqslant y\\ 1\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$，因此

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}\frac{x^2}{y^2}dx = \int_1^2\left(\frac{x^3}{3y^2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{y}}^{y}dy = \int_1^2\left(\frac{y}{3}-\frac{1}{3y^5}\right)dy$$

$$= \left(\frac{y^2}{6}+\frac{1}{12y^4}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{2}{3}+\frac{1}{192}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}$$

$$=\frac{27}{64}.$$

例 4-39 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=1$ 与 y 轴所围成的区域（图 4-27）.

解 若将积分区域 D 看成 x 型区域，即按先 y 后 x 的顺序作二次积分，由图可知，区域 D 的上方曲线 $y_上=1$，D 的下方曲线 $y_下=x$. 于是

$$\iint_D e^{-y^2}dxdy = \int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy.$$

由于 $\int e^{-y^2}dy$ 不能用初等函数表示，因此二重积分 $\iint\limits_D e^{-y^2}\cdot dxdy$ 不能按先 y 后 x 的顺序作二次积分，应考虑按先 x 后 y 的顺序作二次积分. 将积分区域 D 向 y 坐标轴投影得到点 y 的变化范围 $0\leqslant y\leqslant 1$，而左曲线 $x_左=\psi_1(y)=0$，右曲线 $x_右=\psi_2(y)=y$. 因此

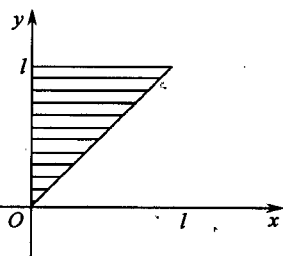


图 4-27

$$\iint_D e^{-y^2}dxdy = \int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx = \int_0^1 (e^{-y^2}x)_0^y dy = \int_0^1 ye^{-y^2}dy$$

$$= -\int_0^1\frac{1}{2}e^{-y^2}d(-y^2) = -\frac{1}{2}(e^{-y^2})\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2e}.$$

例 4-37、例 4-38、例 4-39 都说明选择积分次序非常重要，它不仅决定了积分的难易（例 4-37、例 4-38），而且还决定二重积分是否能求出来（例 4-39）. 选择积分次序的方法是：首先确定积分区域 D 是 x 型区域还是 y 型区域，其次再看被积函数先对哪个自变量的原函数容易求出来.

例 4-40 改变二重积分 $\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}f(x,y)dy$ 的积分次序.

解 由题中所给的先 y 后 x 的二次积分顺序可知，积分区域 D 为 x 型区域，再根据积分上下限可划出积分区域 D 的图形（图 4-28）.

若将积分次序改变成先 x 后 y，需将区域 D 分为 D_1 和 D_2. D_1 的左曲线为 $x=-\sqrt{y}$，右曲线为 $x=\sqrt{y}$；D_2 的左曲线为 $x=y-2$，右曲线为 $x=\sqrt{y}$，因此

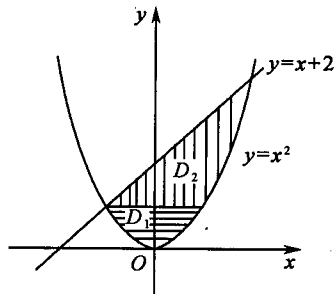


图 4-28



$$\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$

2. 极坐标系下二重积分的计算

某些类型的二重积分，其积分区域的边界曲线或被积函数用极坐标表达比较简单，如积分区域为圆区域、扇形区域、圆环区域等或被积函数为 $f(x^2+y^2)$ 型时，在直角坐标系下计算二重积分往往比较复杂，而利用极坐标来计算却比较方便，下面简单介绍极坐标系下二重积分的计算.

用一族以原点为圆心的同心圆和一族以原点为始点的射线将区域 D 分成 n 个小区域. 设 $d\sigma$ 是半径为 ρ 和 $\rho+d\rho$ 的两个圆弧及极角等于 θ 和 $\theta+d\theta$ 的两条射线所围成的小区域(如图 4-29)，也用 $d\sigma$ 表示该小区域的面积. 这个小区域可以近似地看成边长为 $d\rho$ 和 $\rho d\theta$ 的小矩形，于是在极坐标系下面积元素 $d\sigma=\rho d\rho d\theta$.

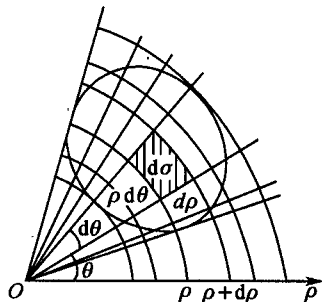


图 4-29

由于平面上任意一点的直角坐标 (x,y) 与极坐标 (ρ,θ) 之间有如下的变换关系：$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，因而在极坐标系中二重积分

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta. \tag{4-20}$$

其中区域 D 及被积函数都用极坐标表示. 与直角坐标系下二重积分的计算类似，我们再把它化为关于 ρ、θ 的二次积分来计算，下面分三种情形讨论.

(1) 极点在区域 D 内部

如果区域 D 的边界曲线方程为 $\rho=\rho(\theta)$，此时区域 D 可表示成不等式

$$\begin{cases}0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta)\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases},$$

于是

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho. \tag{4-21}$$

例 4-41 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ (见图 4-30).

解 令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，于是 D 的边界曲线方程为 $\rho=2$，即 D 可表示成不等式 $\begin{cases}0\leqslant\rho\leqslant 2\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$. 由(4-21)式，得

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2 d\rho = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{16\pi}{3}.$$

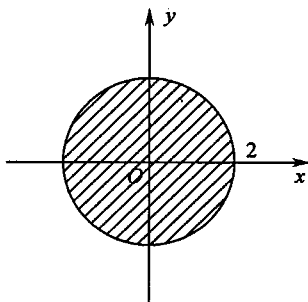


图 4-30

(2) 极点在 D 的边界曲线上

设区域 D 的边界曲线方程为 $\rho=\rho(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，则区域 D 可表示成不等式

$$\begin{cases}0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta)\\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\end{cases},\ \text{于是}$$



$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\rho(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho. \tag{4-22}$$

例 4-42 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，其中 D 为圆 $x^2+y^2=2ax$ 所围成的区域(图 4-31).

解 将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入圆的方程 $x^2+y^2=2ax$ 中，得圆的极坐标方程：

$$\rho=2a\cos\theta,$$

于是 D 可表示为：$\begin{cases}0\leqslant\rho\leqslant 2a\cos\theta\\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

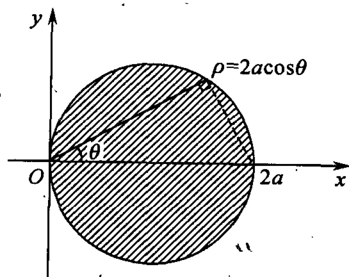


图 4-31

由公式(4-22)，得

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma &= \iint_D \rho\cdot\rho d\rho d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^2 d\rho\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\rho^3\right)\Big|_0^{2a\cos\theta}d\theta = \frac{8}{3}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta\\ &= \frac{8}{3}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta = \frac{32}{9}a^3.\end{aligned}$$

(3) 极点在区域 D 外部

设区域 D 在两射线 $\theta=\alpha$ 和 $\theta=\beta$ 之间；区域 D 的边界曲线可用极坐标表达成：$\rho=\rho_1(\theta)$ 与 $\rho=\rho_2(\theta)$. 此时 D 可表示成不等式：

$$\begin{cases}\rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta)\\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\end{cases}，于是$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho. \tag{4-23}$$

例 4-43 计算 $\iint_D \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中 D 是由直线 $y=0$(的上方)及圆 $x^2+y^2=1$(的外部)和 $x^2+y^2-2x=0$(的内部)所围成的闭区域，见图 4-32.

解 将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 分别代入 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-2x=0$ 中，于是得到它们的极坐标方程为：

$$\rho=1 \text{ 和 } \rho=2\cos\theta,$$

解方程组 $\begin{cases}\rho=1\\ \rho=2\cos\theta\end{cases}$ 得两圆交点 $\left(1,\dfrac{\pi}{3}\right)$，又直线 $y=0$ 的极坐标方程为 $\theta=0$，于是，区域 D 可表示成不等式：

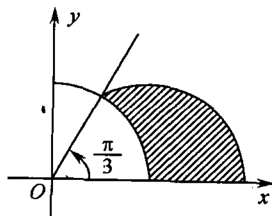


图 4-32

$\begin{cases}1\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta\\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$，由公式(4-23)，得

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}\frac{1}{\rho}\rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_1^{2\cos\theta}d\rho\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\rho\Big|_1^{2\cos\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos\theta-1)d\theta = (2\sin\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\\ &= \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

可根据二重积分的几何意义求空间立体的体积.

例 4-44 求由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$、圆柱面 $x^2+y^2=1$ 及坐标面 $z=0$ 所围成的立体在第二、三、四卦限的体积，如图 4-33.

解 圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与坐标面 $z=0$ 的交线为圆 $x^2+y^2=1$，于是图中立体是以曲面



$z=x^2+y^2$ 为曲顶，以圆 $x^2+y^2=1$ 为底的曲顶柱体，它在 xOy 坐标面的投影区域为 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\rho\leqslant 1\}$. 由于所求的立体体积位于第二、三、四卦限，所以积分区域 D 可表示成不等式：

$$\begin{cases}0\leqslant\rho\leqslant 1\\ \dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases},$$

由公式(4-22)可计算出所求立体的体积为

$$V=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \rho^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^1\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{8}\pi.$$

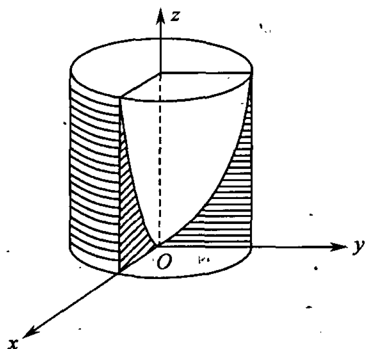


图 4-33

【思考与练习】

1. 若在积分区域 D 上 $f(x,y)<0$，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的几何意义是什么？

2. 若积分区域 $D=D_1\cup D_2$，其中 $D_1=\{(x,y)\mid (x,y)\in D, f(x,y)\geqslant 0\}$，$D_2=\{(x,y)\mid (x,y)\in D, f(x,y)<0\}$，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的几何意义是什么？

3. $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$（其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$，$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4; x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$）是否成立？若 $f(x,y)=f(-x,y)$ 且 $f(x,y)=f(x,-y)$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 是否成立？

习 题 四

1. 求下列函数的定义域，并画图

(1) $z=\sqrt{\ln(y^2-4x+9)}$；　(2) $z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{9}+\sqrt{x^2+y^2-4}$；

(3) $z=xy+\sqrt{x-\sqrt{y}}$；　(4) $z=xy+\sqrt{\ln\dfrac{R^2}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2+R^2}$.

2. 求下列函数的极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2+2}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$；　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ y\to 0}}\dfrac{x\sin xy}{y}$.

3. 求下列函数的不连续点

(1) $z=\cos\dfrac{1}{x+y}$；　(2) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$；

(3) $z=\ln(|x^2-y^2|)$；　(4) $z=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$.

4. 求下列函数的一阶偏导数

(1) $z=xy+\dfrac{x}{y}$；　(2) $z=\dfrac{x}{y^2}e^{2x+y}$；

(3) $u=\ln\frac{yz}{x}$;　(4) $z=\ln\ln(x+\ln y)$;

(5) $z=\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$;　(6) $z=(1+x)^{y}$.

5. 求下列函数在指定点的一阶偏导数

(1) $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$在点$(3,4)$;　(2) $z=e^{-x}\sin(x+2y)$在点$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

6. 求下列函数的二阶偏导数

(1) $z=x^2y-2xy^3+xy+1$;　(2) $z=\cos^2(ax+by)$.

7. 求下列函数的全微分

(1) $z=e^{\frac{y}{x}}$;　(2) $z=\arcsin\frac{x}{y}$;

(3) $z=yx^{y}$;　(4) $z=\frac{x+y}{x-y}$.

8. 设函数 $z=x^{y}$，求当 $x=1$，$y=2$，$\Delta x=0.04$，$\Delta y=-0.02$ 时的全微分.

9. 求下列复合函数的偏导数或全导数

(1) $z=\frac{y}{x}$，而 $x=e^{t}$，$y=1-e^{2t}$;

(2) $z=\frac{y}{1-x^2}$，而 $x=\sin t$，$y=\frac{1}{t}$;

(3) $z=\operatorname{arccot}(xy)$，$y=e^{x}$;

(4) $z=x^2\ln y$，而 $x=\frac{u}{v}$，$y=3u-2v$，求$\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial v}$.

10. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数).

(1) $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$;　(2) $w=f(x+y+z,xyz)$.

11. 设 $z=xy+xF(u)$，而 $u=\frac{y}{x}$，证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy.$$

12. 设 $xyz=a^3$，证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-2z.$$

13. 求由下列方程所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的一阶偏导数

(1) $e^{z}=xyz$;　(2) $x^2+y^2+z^2-6xyz=0$;

(3) $z^2y-xz^3=\ln 2$;　(4) $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$.

14. 求下列函数的极值

(1) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$;　(2) $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$;

(3) $f(x,y)=xy(a-x-y)\ (a>0,x>0,y>0)$.

15. 求内接于半径为 R 的球有最大体积的长方体.

16. 在平面 $3x-2z=0$ 上求一点，使它与点 $A(1,1,1)$ 和点 $B(2,3,4)$ 的距离平方和为最小.

17. 已知 x 单位的某种注射剂，在注射后 t 小时的效应可按下式计算

$$y=f(x,t)=x^2(a-x)te^{-t}\qquad(x>0,t>0)$$

其中 a 为某一常数。试确定 x 和 t 的值，使 y 达到最大值.



18. 比较积分 $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x^2+y^2)^2\mathrm{d}\sigma$ 的大小，其中 D 为由 x 轴、y 轴及直线 $x+y=1$ 所围成的区域.

19. 将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为二次积分（两种次序都要），积分区域给定如下：

(1) D：$x+y=1$、$x-y=1$、$x=0$ 所围成的区域；

(2) D：$y=x$、$y=3x$、$x=1$、$x=3$ 所围成的区域；

(3) D：$y=x^2$、$y=4-x^2$ 所围成的区域；

(4) D：$(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 所围成的区域.

20. 更换下列各积分的次序

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^3 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$；

(3) $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

21. 计算下列二重积分

(1) $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$x+y=1$、$x-y=1$、$x=0$ 所围成的区域；

(2) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$x=2$、$y=x$、$xy=1$ 所围成的区域；

(3) $\iint\limits_D (x+6y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$y=x$、$y=5x$、$x=1$ 所围成的区域；

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$y=x$、$y=x+a$、$y=a$、$y=3a\,(a>0)$ 所围成的区域；

(5) $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$y=x$、$y^2=x$ 所围成的区域；

(6) $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$x^2+y^2=a^2$ 所围成的在第一象限内的区域；

(7) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$x^2+y^2=Rx$ 所围成的区域；

(8) $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$x^2+y^2=4$、$x^2+y^2=1$ 及直线 $y=x$、$y=0$ 所围成的在第一象限内的区域.

22. 利用二重积分计算 $y=x$、$y=5x$、$x=1$ 所围成图形的面积.

23. 求由球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 与柱面 $x^2+y^2=2ay$ 所围成立体的体积（指含在柱体内的部分）.

第五章　微分方程基础

在科学研究中，寻求变量间的函数关系是十分重要的．由实验或观察所得到的结果，通常不能直接确定变量间的函数关系，而必须根据实际问题的条件，建立起这些变量和导数（或微分）间的关系式．这样，我们就得到了含有未知函数的导数（或微分）的方程，这种方程称为微分方程．再通过解微分方程，就可以得到我们所要寻求的变量间的函数关系式．

第一节　一般概念

下面我们通过生物、几何和物理学中的几个具体问题来介绍微分方程的基本概念．

例 5-1　在理想环境中，某细菌的增殖速率与它的即时存在量成正比．试建立该细菌在时刻 t 的存在量所应满足的微分方程．

解　设在任意时刻 t，该细菌的即时存在量为 $N(t)$，并从观察中已测出正比例常数为 k，则可得到微分方程

$$\frac{dN(t)}{dt}=kN(t). \tag{5-1}$$

例 5-2　设一曲线通过点(1,2)，且在该曲线上任意点处的切线斜率为 $2x$，求这曲线方程．

解　设所求曲线方程为 $y=f(x)$，根据导数的几何意义，可得等式

$$\frac{dy}{dx}=2x \tag{5-2}$$

或

$$dy=2xdx.$$

对上式两边积分

$$\int dy=\int 2xdx$$

得

$$y=x^2+C. \tag{5-3}$$

式中 C 是任意常数．方程(5-3)表示以常数 C 为参数的抛物线族，如图 5-1 所示．

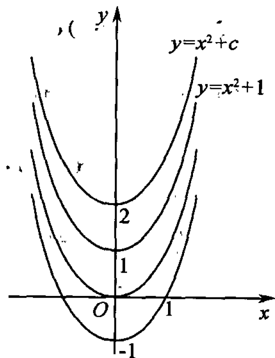


图 5-1

又因曲线通过点(1,2)，所以曲线方程(5-3)还应满足条件

$$x=1,\ y=2 \tag{5-4}$$

将条件(5-4)代入(5-3)，得

$$2=1+C$$

故

$$C=1,$$

于是所求的曲线方程为

$$y=x^2+1. \tag{5-5}$$

例 5-3　质量为 m 的物体从空中自由下落，在不考虑空气阻力的情况下，试求下落的距离应满足的微分方程．

解　设在时刻 t，下落距离为 $s(t)$，自由落体的加速度为常数 g，则这一自由落体运动可表达为

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g. \tag{5-6}$$



含有自变量、未知函数和未知函数的导数(或微分)的方程称为**微分方程**(**ordinary differential equation**).

以上三例所建立的式(5-1)、式(5-2)、式(5-6)都是微分方程，下面介绍微分方程的两个重要概念.

(一) 微分方程的阶

微分方程可以根据它所含导数或微分的阶数来分类. 微分方程中所含未知函数的导数或微分的最高阶数，叫做**微分方程的阶**(**order**)，例如上述式(5-1)和式(5-2)是一阶微分方程，而式(5-6)则是二阶微分方程.

(二) 微分方程的解

如果把某函数以及它的导数代入微分方程，能使方程成为恒等式，那么这个函数就叫做**微分方程的解**(**solution**).

例如，式(5-3)和式(5-5)都是微分方程(5-2)的解. 根据解的概念，要验证某函数是否是微分方程的解，只要把该函数代入微分方程中检验就可以了，容易验证

$$N(t)=Ce^{kt} \tag{5-7}$$

是方程(5-1)的解；

$$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{5-8}$$

是方程(5-6)的解.

微分方程的解又有通解与特解之分.

1. 通解

含有独立的任意常数，且常数的个数与微分方程的阶数有相同的解，叫做**微分方程的通解**(**general solution**).

式(5-7)和式(5-3)都含有一个任意常数，它们分别是一阶微分方程(5-1)和(5-2)的通解，式(5-8)含有独立的 2 个任意常数 C_1 和 C_2(C_1t、C_2 这两项不能合并)，式(5-8)是二阶微分方程(5-6)的通解.

2. 特解

在通解中，利用已知条件(或初始条件)求出任意常数所应取的确定数值，所得的解叫做**微分方程的特解**(**particular solution**).

式(5-5)是方程(5-2)满足条件(5-4)的特解.

在例 5-1 中，如果我们于 $t=t_0$ 时测得细菌的即时存在量 $N(t_0)=N_0$，则可利用这一条件求出通解式(5-7)中任意常数 C 所应取的确定数值. 因

$$N_0=Ce^{kt_0}$$

则有

$$C=N_0e^{-kt_0},$$

于是求得方程(5-1)满足这一初始条件的特解

$$N=N_0e^{k(t-t_0)}.$$

在解微分方程时，一般是先求通解，然后利用已知条件(或初始条件)确定任意常数，求出特解.

【思考与练习】

1. 验证 $y=\pm1$ 是方程 $y'=\sqrt{1-y^2}$ 的解，并考察它们是否包含在通解之中.
2. $y=(C_1+iC_2)x$ 是否是二阶微分方程 $y''=0$ 的通解?

第二节　一阶微分方程

一阶微分方程是含有自变量、未知函数和未知函数的一阶导数（或一阶微分）的方程，其一般形式为

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y) \tag{5-9}$$

下面介绍两种常见的一阶微分方程及其解法.

一、可分离变量的微分方程

如果方程(5-9)式等号右端的函数可分解成 x 的函数与 y 的函数相乘的形式，即可化为形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{5-10}$$

的方程，则称它为**可分离变量的微分方程**(**separable equation**).

这类方程的解法是将方程(5-10)改写成变量分离的形式

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,$$

然后两边积分

$$\int\frac{dy}{g(x)}=\int f(x)dx,$$

即得到微分方程的通解.

例 5-4　现在我们来解例 5-1 关于细菌存在量的微分方程

$$\frac{dN(t)}{dt}=kN(t).$$

解　将原方程改写成变量分离形式

$$\frac{dN}{N}=kdt,$$

两边积分

$$\int\frac{dN}{N}=\int kdt$$

$$\ln N=kt+\ln C$$

$$N=Ce^{kt}.$$

这就得到了原方程的通解. 若问题还给出了初始条件：在 $t=t_0$ 时，测得 $N(t_0)=4000$ 单位，则还可由该初始条件确定微分方程的特解. 将 $N(t_0)=4000$ 代入以上通解之中，得

$$4000=Ce^{kt_0}$$

即

$$C=4000e^{-kt_0}$$

于是得到方程满足该初始条件的特解

$$N(t)=4000e^{k(t-t_0)}.$$

例 5-5　求微分方程

$$(1+y^2)dx+xydy=0$$

的通解.

解　分离变量，可化原方程为



$$\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分

$$\int\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

得方程的通解为

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=-\ln x+C_1.$$

有时为了把方程的解表达得更为简洁，可作一些适当的变换，如上式可化为

$$\ln(1+y^2)+2\ln x=2C_1$$

即
$$x^2(1+y^2)=e^{2C_1}$$

记常数 $e^{2C_1}=C$，则本例所求的通解可表达为

$$x^2(1+y^2)=C.$$

例 5-3 通过自由落体运动而建立起来的式(5-6)虽是一个二阶微分方程，但经过降阶后，我们可以把式(5-6)化为可分离变量的微分方程来解. 令 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$，则二阶微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g$ 便化为一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g.$$

其分离变量的形式为

$$\mathrm{d}v=g\mathrm{d}t,$$

两边积分，得

$$v(t)=gt+C_1,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=gt+C_1.$$

上式再经过分离变量，得

$$\mathrm{d}s=(gt+C_1)\mathrm{d}t,$$

两边再积分，得

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2.$$

此式与上节所验证的解式(5-8)完全一致.

如果要求出满足初始条件：$t=0$ 时 $v=0$，$s=0$ 的特解，我们可以由 $v(0)=0$ 中得 $C_1=0$，再由 $s(0)=0$ 中得 $C_2=0$，于是可获得特解为

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2.$$

二、一阶线性微分方程

让我们先来分析下面一个微分方程

$$y'+P(x)y=Q(x). \tag{5-11}$$

显然，该方程仅含有一阶导数，而且未知函数 y 以及它的导数 y' 都是一次幂，我们称这类方程为**一阶线性微分方程(linear first-order differential equation)**. $P(x)$ 是未知函数 y 的系数，它可以是 x 函数，也可以是一个常数. $Q(x)$ 称为自由项. 当 $Q(x)\equiv0$ 时，此方程变为

$$y'+P(x)y=0. \tag{5-12}$$

式(5-12)称为一阶线性齐次(**homogeneous**)微分方程．当 $Q(x)\neq 0$ 时式(5-11)称为一阶线性非齐次(**inhomogeneous**)微分方程．

为了求解一阶线性非齐次微分方程．我们首先讨论与它对应的齐次方程．

方程(5-12)是一个可分离变量的微分方程，分离变量后，得

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx,$$

两边积分

$$\int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx$$

$$\ln y=-\int P(x)dx+\ln C$$

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{5-13}$$

式(5-13)就是一阶线性齐次微分方程(5-12)的通解，其中 C 是任意常数．

下面我们再来研究非齐次方程(5-11)的解法．我们很自然会想到仿照上面的方法去解，为此，把方程写成

$$\frac{dy}{y}=\frac{Q(x)}{y}dx-P(x)dx$$

两边积分，得

$$\ln y=\int\frac{Q(x)}{y}dx-\int P(x)dx.$$

上式等号右边的第一个积分中含有未知函数 y，这个积分还不能计算出来，但是我们知道 y 是 x 的函数，因此 $Q(x)/y$ 也是 x 的函数，从而 $Q(x)/y$ 的积分也应是 x 的函数，暂记 $\int\frac{Q(x)}{y}dx=u(x)$，这样上式就可写成

$$\ln y=u(x)-\int P(x)dx.$$

故

$$y=e^{u(x)}e^{-\int P(x)dx}.$$

令 $e^{u(x)}=C(x)$，于是有

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{5-14}$$

这里 $C(x)$ 是待定的函数．

现在非齐次方程的解虽然还没有求出来，但已知道了解的形式，将式(5-14)与式(5-13)相比较，可以看出：在对应的齐次方程的通解(5-13)中，将任意常数 C 换成 x 的函数 $C(x)$，便是非齐次方程的解．这种将方程通解中的任意常数变易为待定函数的方法叫做**常数变易法**(**method of variation of constants**)．这个 $C(x)$ 究竟是什么呢？现在我们来确定它．

对式(5-14)两边同时求导，得

$$y'=C'(x)e^{-\int P(x)dx}+C(x)\left[e^{-\int P(x)dx}\right]'$$

$$=C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

把 y 及 y' 代入原来的非齐次方程，得

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

故有

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

从而有

$$C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

所以

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$$



于是得到非齐次方程的通解

$$y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

即
$$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x. \tag{5-15}$$

由此可见，非齐次方程的通解由两项组成，第一项 $Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 是对应齐次方程的通解；第二项 $e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ 是原来非齐次方程的一个特解（在通解中令 $C=0$ 便得到这个特解）．今后求非齐次方程的通解时，我们可以直接应用上述通解公式(5-15)，也可以用推导通解公式这样的过程逐步求解.

例 5-6 求微分方程

$$y' + y\cos x = e^{-\sin x}$$

的通解.

解 这里 $P(x)=\cos x$，$Q(x)=e^{-\sin x}$．直接应用公式(5-15)，有

$$y = Ce^{-\int\cos x\mathrm{d}x} + e^{-\int\cos x\mathrm{d}x}\int e^{-\sin x\mathrm{d}x}e^{\int\cos x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

即
$$y = Ce^{-\sin x} + xe^{-\sin x}.$$

例 5-7 求微分方程

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2$$

的通解.

解 这里 $P(x) = -\frac{1}{x}$，$Q(x)=x^2$.

(1) 先求出对应的齐次方程的通解

$$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Ce^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x} = Ce^{\ln x}$$

即其对应的齐次方程的通解为

$$y = Cx;$$

(2) 将 C 换成 x 的函数 $C(x)$，得到非齐次方程的通解形式

$$y = C(x)x;$$

(3) 将 $y=C(x)x$ 及 $y'=C'(x)x+C(x)$ 代入原非齐次方程中，得

$$C'(x) = x;$$

(4) 积分上式，得

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

从而获得原非齐次方程的通解

$$y = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)x.$$

【思考与练习】

1. $y' = \frac{1}{x-y} + 1$ 属于 $y'=f(ax+by)$ 这一类型的微分方程，试将它化为可分离变量的微分方程求解.

2. 形如 $y'+P(x)y=Q(x)y^n$ $(n\neq0,1)$ 的方程称为 Bernoulli 方程，作变换 $z=y^{1-n}$ 将其化为未知函数是 z 的一阶线性微分方程.

第三节　可降阶的二阶微分方程

二阶及二阶以上的微分方程称为高阶微分方程. 本节我们介绍三类容易降阶的高阶微分方程的求解方法.

一、$y''=f(x)$ 型的微分方程

这类方程的右端仅含有自变量 x，由不定积分的知识可知，接连积分两次，便可得到方程的通解.

例 5-8　求微分方程

$$y''=e^{2x}-\cos x$$

的通解.

解　对所给方程连续积分二次，得

$$y'=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1,$$

$$y=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+C_1x+C_2.$$

这就是所求的通解.

二、$y''=f(x,y')$ 型的微分方程

方程

$$y''=f(x,y') \tag{5-16}$$

的右端不显含未知函数 y. 如果我们设 $y'=p(x)$，那么 $y''=\frac{dp}{dx}=p'$，方程 $y''=f(x,y')$ 成为

$$p'=f(x,p).$$

它是一个关于变量 x、p 的一阶微分方程. 解此一阶微分方程，便可得到原方程的通解.

例 5-9　求微分方程

$$\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy'\\ y|_{x=0}=1\\ y'|_{x=0}=3\end{cases}$$

的解.

解　所给方程属于 $y''=f(x,y')$ 型. 设 $y'=p(x)$，则 $y''=p'(x)$. 将 $y'=p(x)$、$y''=p'(x)$ 代入原方程中，有

$$p'=\frac{2x}{1+x^2}p,$$

即

$$\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}dx.$$

两边积分，得

$$\ln p=\ln(1+x^2)+\ln C_1.$$

所以

$$p=y'=C_1(1+x^2).$$

由初始条件 $y'|_{x=0}=3$，得 $C_1=3$，所以

$$y'=3(1+x^2).$$



再积分，得

$$y=x^3+3x+C_2.$$

又由条件 $y\big|_{x=0}=1$，得 $C_2=1$，于是所求的特解为

$$y=x^3+3x+1.$$

三、$y''=f(y,y')$ 型的微分方程

方程

$$y''=f(y,y') \tag{5-17}$$

中不显含自变量 x，为了求出它的解，我们令 $y'=p(y)$，则 $p(y)$ 是以 y 为中间变量的 x 的复合函数，故有：

$$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

于是，方程成为

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p).$$

这是个关于 y、p 的一阶微分方程，设它的通解为

$$y'=p=\varphi(y,C_1),$$

分离变量后并积分，便得原方程的通解为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2.$$

例 5-10 求微分方程 $y''=\dfrac{y'^2}{y}$ 的通解.

解 本方程右端不显含 x，设 $y'=p(y)$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程中，得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{p^2}{y}.$$

如果 $p\neq0$，可约去 p，即

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{p}{y}.$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

两边积分，得

$$\ln p=\ln y+\ln C_1.$$

所以

$$p=C_1y,$$

也即

$$y'=C_1y.$$

对上式分离变量并积分，有

$$\ln y=C_1x+\ln C_2,$$

所以

$$y=C_2e^{C_1x}.$$

如果 $p=0$，那么立即可得

$$y=C.$$

综合起来，原方程的通解为 $y=C_2e^{C_1x}$（令 $C_1=0$，得 $y=C_2$，$y=C$ 被包含在解 $y=C_2e^{C_1x}$ 中）.

【思考与练习】

试求 $y^{(n)}=\sin x(n>4)$ 的通解.

第四节　二阶常系数线性齐次微分方程

形如

$$A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=f(x)$$

的方程称为**二阶线性微分方程**(**second order linear differential equation**)，式中 $A(x)\neq 0$. 当 $f(x)=0$ 时，这个方程称为齐次的；否则称为非齐次的. 方程左边的各项系数 $A(x)$、$B(x)$ 和 $C(x)$ 均为 x 函数. 当 $A(x)$、$B(x)$、$C(x)$ 均为常数时称为二阶**常系数**(**constant coefficient**)线性微分方程，它的形式是

$$Ay''+By'+Cy=f(x).$$

其中 A、B、C 是已知常数，且 $A\neq 0$. 在本节里我们只讨论**二阶常系数线性齐次微分方程**，即

$$Ay''+By'+Cy=0. \tag{5-18}$$

下面，我们首先建立这种方程解的结构理论.

定理 5-1　若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程(5-18)的两个解，则

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

也是微分方程(5-18)的解，其中 C_1、C_2 是任意常数.

证　只要代入验证就可以了. 对

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

求导，得

$$y'=C_1y_1'+C_2y_2',$$
$$y''=C_1y_1''+C_2y_2''.$$

将它们代入方程(5-18)的左边，得

$$\begin{aligned}&A(C_1y_1''+C_2y_2'')+B(C_1y_1'+C_2y_2')+C(C_1y_1+C_2y_2)\\&=C_1(Ay_1''+By_1'+Cy_1)+C_2(Ay_2''+By_2'+Cy_2)\\&=C_10+C_20\\&=0.\end{aligned}$$

这表明 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 是方程(5-18)的解. 这个性质是线性齐次方程所特有的，称为**迭加原理**(**principle of superposition**).

根据定理 5-1，从一个二阶线性齐次方程的两个特解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 出发，可以构造出无穷多个新的解：

$$y=C_1y_1+C_2y_2.$$

上式中包含了两个任意常数，而方程又是二阶的，那么它是否就是通解呢？不一定，还要看看这两个任意常数是否互相独立，也就是看它们能否合并成一个任意常数，这一点是由 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的关系决定的.

定理 5-2　设 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程(5-18)的两个线性无关的特解，则方程(5-18)的通解是

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x).$$

其中 C_1、C_2 是两个任意常数.

所谓线性无关，是指不存在不全为零的常数 k_1 和 k_2，使 $k_1y_1(x)+k_2y_2(x)=0$，即



$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{常数}.$$

否则，称为线性相关.

如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是线性相关的，则

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = k(\text{常数}),$$

于是有

$$y_1(x) = ky_2(x),$$

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1ky_2(x) + C_2y_2(x) = (C_1k + C_2)y_2(x) = \tilde{C}y_2(x).$$

其中 $\tilde{C} = C_1k + C_2$，这说明它实际上只含有一个任意常数，因而它不是二阶微分方程(5-18)的通解.

按照定理5-2，求出方程(5-18)的通解的关键是先要求出它的两个线性无关的特解. 由于方程(5-18)具有线性常系数的特点，而指数函数的导数仍为指数函数，故我们可以假设方程(5-18)有形如：

$$y = e^{\lambda x}$$

形式的解. 考虑选择适当的 λ 值，使 $y = e^{\lambda x}$ 满足方程(5-18). 为此，我们先求出

$$y' = \lambda e^{\lambda x},\quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

将它们代入方程(5-18)中，得

$$A\lambda^2 e^{\lambda x} + B\lambda e^{\lambda x} + Ce^{\lambda x} = 0,$$

即

$$e^{\lambda x}(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0.$$

由于 $e^{\lambda x} \neq 0$，所以有

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0. \tag{5-19}$$

由此可见，若 λ 是二次代数方程(5-19)的一个根，则 $y = e^{\lambda x}$ 必是微分方程(5-18)的一个特解. 因此，我们称二次代数方程(5-19)为方程(5-18)的**特征方程**(**characteristic equation**)，式(5-19)的根称为式(5-18)的**特征根**(**characteristic root**).

由初等代数得知，方程(5-18)的两个特征根是

$$\lambda_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

$$\lambda_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

根据判别式 $B^2 - 4AC$ 的符号不同，可分下面三种情况讨论：

(1) 当 $B^2 - 4AC > 0$ 时，特征方程(5-19)有两个相异的实数根 λ_1 和 λ_2，$y_1 = e^{\lambda_1 x}$ 和 $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ 则是方程(5-18)的两个特解. 这时，因为

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq \text{常数},$$

即 y_1 和 y_2 线性无关，于是方程(5-18)的通解为

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}.$$

例 5-11　求方程 $y'' - 4y' - 5y = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 1$、$y'(0) = 2$ 的特解.

解　因特征方程为

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

或

$$(\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0.$$

于是，它有两个不相等的实数根

$$\lambda_1 = -1,\quad \lambda_2 = 5.$$

所以所求方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}.$$

对上式求导，得

$$y' = -C_1 e^{-x} + 5C_2 e^{5x}.$$

将初始条件 $y(0)=1$、$y'(0)=2$ 代入以上二式，得

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 2 = -C_1 + 5C_2 \end{cases}.$$

解此方程组，得

$$C_1 = \frac{1}{2},\quad C_2 = \frac{1}{2}.$$

因此所求的特解为

$$y = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{5x}.$$

(2) 当 $B^2 - 4AC = 0$ 时，方程(5-19)有两个相等的实根

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{B}{2A}.$$

这时，根据特征方程只能得到方程(5-18)的一个特解

$$y_1 = e^{-\frac{B}{2A}x},$$

为了求得(5-18)的通解，还必须找到一个与 $y_1 = e^{-\frac{B}{2A}x}$ 线性无关的特解 y_2. 设 $\frac{y_2}{y_1} = u(x) \neq$ 常数，这时 $u(x)$ 是一个待定的函数，

$$y_2 = u(x)y_1 = u(x)e^{\lambda_1 x},$$

$$y_2' = u'(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 u(x)e^{\lambda_1 x},$$

$$y_2'' = u''(x)e^{\lambda_1 x} + 2\lambda_1 u'(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 u(x)e^{\lambda_1 x}.$$

$y_2(x)$ 若是原方程的解，应有

$$Ay_2'' + By_2' + Cy_2 = 0$$

即

$$A(u'' + 2\lambda_1 u' + \lambda_1^2 u)e^{\lambda_1 x} + B(u' + \lambda_1 u)e^{\lambda_1 x} + Cue^{\lambda_1 x} = 0.$$

因 $e^{\lambda_1 x} \neq 0$，故

$$Au'' + (2A\lambda_1 + B)u' + (A\lambda_1^2 + B\lambda_1 + C)u = 0.$$

又因 λ_1 是特征方程的根，所以

$$A\lambda_1^2 + B\lambda_1 + C = 0;$$

同时，$B^2 - 4AC = 0$，λ_1 是重根，

$$\lambda_1 = -\frac{B}{2A} \text{或} \ 2A\lambda_1 + B = 0.$$

于是得

$$Au'' = 0.$$

但 $A \neq 0$，因此

$$u''(x) = 0.$$

将此方程积分两次，得

$$u(x) = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2.$$

这里，$\tilde{C}_1$ 和 $\tilde{C}_2$ 为两个任意常数. 由于我们只需取一个不等于常数的解，不妨取

$$u(x) = x,$$

这就得到原方程的另一个特解

$$y_2 = xe^{\lambda_1 x}.$$

且 y_1 与 y_2 线性无关，从而得到原方程的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}.$$

例 5-12　求方程 $y'' - 6y' + 9y = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 0$、$y'(0) = 1$ 的特解.

解　所给方程的特征方程为

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

或

$$(\lambda - 3)^2 = 0,$$

故

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

所以所求方程的通解为

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

对上式求导，得

$$y' = 3C_1 e^{3x} + 3C_2 x e^{3x} + C_2 e^{3x}.$$

由初始条件，得

$$\begin{cases} 0 = C_1 \\ 1 = 3C_1 + C_2 \end{cases}$$

解得

$$C_1 = 0,\ C_2 = 1.$$

于是所求的特解为

$$y = xe^{3x}.$$

（3）当 $B^2 - 4AC < 0$ 时，特征方程(5-19)有一对共轭复数根

$$\lambda_1 = \frac{-B + i\sqrt{4AC - B^2}}{2A} = \alpha + i\beta,$$

$$\lambda_2 = \frac{-B - i\sqrt{4AC - B^2}}{2A} = \alpha - i\beta.$$

因此得方程(5-18)的两个特解

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}、y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x},$$

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{2i\beta x} \neq \text{常数}.$$

所以 y_1、y_2 是线性无关的，于是方程(5-18)的通解为

$$y = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

利用欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

可将 y_1、y_2 改写成以下形式

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

根据二阶线性齐次方程解的结构理论定理 5-1，可知(5-18)的两个解分别乘以任意常数再相加所得的和仍是方程(5-18)的解，所以

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$\tilde{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

也是方程(5-18)的解，且不难看出 $\tilde{y}_1$ 和 $\tilde{y}_2$ 是线性无关的. 由 $\tilde{y}_1$ 和 $\tilde{y}_2$，我们可得到方程

(5-18)的实数形式的通解

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

例 5-13 求微分方程 $y''-4y'+5y=0$ 的通解.

解 特征方程为

$$\lambda^2-4\lambda+5=0,$$

它的两个根 $\lambda_1=2+i$、$\lambda_2=2-i$ 是一对共轭复根，于是方程的通解为

$$y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

到此，我们已经完全解决了求解二阶常系数线性齐次微分方程的问题，找到了解的形式并弄清了通解的结构. 现将求解二阶常系数线性齐次微分方程(5-18)的过程简要归纳如下：

第一步，写出微分方程(5-18)的特征方程(5-19)；

第二步，求出特征方程(5-19)的两个根 λ_1 和 λ_2；

第三步，根据特征方程(5-19)的两个根不同情况，按照表 5-1 写出微分方程(5-18)的通解；

第四步，若问题是要求出满足初始条件的特解，再把初始条件代入通解之中，即可确定 C_1 和 C_2，从而获得满足初始条件的特解.

表 5-1

特征方程 $A\lambda^2+B\lambda+C=0$ 的根	微分方程 $Ay''+By'+Cy=0$ 的通解
不等实根 $\lambda_1\neq\lambda_2$	$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$
相等实根 $\lambda_1=\lambda_2$	$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2xe^{\lambda_1x}$
共轭复根 $\lambda_1=\alpha+i\beta$、$\lambda_2=\alpha-i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

【思考与练习】

设函数 $y_1=3e^x\sin 2x$ 和 $y_2=-e^x\sin x\cos x$ 都是某二阶常系数线性齐次方程的解，这两个解线性无关吗？能否找到另一个解 y_3，使 y_1 和 y_3 线性无关？

第五节 微分方程在医学上的应用

随着整个科学技术的数学化，现代医学也加快了向数学化发展的速度. 普遍地、有效地应用数学方法来解决医学科研中的问题，提示其中的数量规律性，已成为现代医学发展的潮流. 这种提示医学问题中各变量之间关系的解析式，称为数学模型. 而微分方程是建立数学模型时应用得最为广泛的工具之一. 这里，我们仅列举几个简单的例子，初步说明现代医学定量分析研究的一些方法和途径.

一、细菌的繁殖

在例 5-1 中曾提到过“理想环境”中的细菌增殖模型. 所谓“理想环境”是指所论及的系统满足以下的三个条件：①除系统本身的繁殖以外，没有由系统外向系统内迁入和由系统内向系统外迁出等情况；②系统本身的繁殖不受空间和营养供应的限制；③温度、湿度等各项环境因素均对系统适宜. 因此，“理想环境”至多只是实验室内人为制造的环境.



自然环境中的空间和资源总是有限度的，实际上生物的出生率和死亡率都受着它们所处的环境的影响：当资源丰富、生存条件较好时，出生率增加，死亡率减少；当该生物总数过多，资源供不应求时，出生率减少而死亡率增加. 现假定出生率 p 和死亡率 q 都是生物总数 x 的线性函数，即

$$p = a - bx,\ q = \alpha + \beta x,$$

式中 a、b、α、β 都是正数，则有

$$\frac{dx}{dt} = (p - q)x. \tag{5-20}$$

注意式(5-20)中的$(p-q)$不同于式(5-1)中的正比例常数，$(p-q)$也是 x 线性函数：

$$p - q = (a - bx) - (\alpha + \beta x) = (a - \alpha) - (b + \beta)x = r - kx,$$

其中，$r = (a - \alpha)$，$k = (b + \beta)$.

代入式(5-20)，有

$$\frac{dx}{dt} = (r - kx)x \tag{5-21}$$

或

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = r - kx. \tag{5-22}$$

式(5-22)中的$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$称之为相对增殖率，它表述的是单位时间内单位数量的生物所出现的增长.

例 5-14 检验人员对某蓄水池定期抽取单位容积水样观察，测得该水池中大肠杆菌的相对增殖率为

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = r - kx$$

式中 r、k 均为正数，试分析该水池中大肠杆菌的繁殖规律.

解 将检验人员测得的关于相对增殖率的关系式进行变量分离，得

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{(r - kx)} = dt$$

即

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{k}{r - kx}\right)dx = r\,dt,$$

两边积分，得

$$\ln x - \ln(r - kx) = rt + \ln C,$$

$$\frac{x}{r - kx} = Ce^{rt}. \tag{5-23}$$

设初次取样时 $t = 0$，测得 $x(0) = x_0$，将此初始值代入式(5-23)，则有

$$C = \frac{x_0}{r - kx_0}.$$

于是式(5-23)化为

$$\frac{x}{r - kx} = \left(\frac{x_0}{r - kx_0}\right)e^{rt}.$$

解 x 可得：

$$x = \frac{r}{k + \frac{r - kx_0}{x_0}e^{-rt}} \tag{5-24}$$

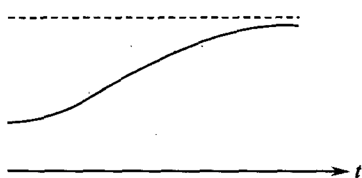


图 5-2

由式(5-24)可知：若 $r > kx_0$，则 $x(t)$ 是 t 的单调增函数；当 $t\to\infty$ 时，$x\to\frac{r}{k}$. $\frac{r}{k}$ 是该蓄水池中大肠杆菌密度的极限值.

式(5-24)称为自然生长方程，即 logistic 方程，它对表达自然环境中生物种群的生长繁殖有着重要意义. 式(5-24)的图形为 S 形曲线(图 5-2)，称为 **logistic 曲线**.

二、药物动力学模型

药物动力学是一门研究药物、毒物及其代谢物在机体内吸收、分布、代谢和排泄过程定量规律的科学. 这里仅以最简单的一室模型为例，说明微分方程在这一方面的应用.

例 5-15 假定药物以恒定的速率 k_0 进行静脉滴注，试求体内药量随时间的变化规律.

解 把机体设想为一个同质单元，并假定药物在体内按一级速率过程消除，消除的速率常数为 k. 这样的一室模型如图 5-3 所示.

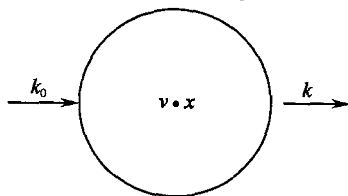


图 5-3

设静脉滴注 t 时刻体内的药量为 $x(t)$，则有以下数学模型：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k_0 - kx. \tag{5-25}$$

这是一个可分离变量的一阶微分方程，在初始条件 $t=0$，$x=0$ 下，不难求得其解为

$$x = \frac{k_0}{k}(1 - e^{-kt}). \tag{5-26}$$

考察式(5-26)，可知体内的药量在静脉滴注后随时间上升，经过相当长的时间后，体内的药量趋于一个稳定水平

$$\lim_{x\to\infty} x(t) = \frac{k_0}{k}. \tag{5-27}$$

式(5-27)显示：静脉滴注的速率愈大，最后体内药量的稳定水平就愈高.

三、流行病数学模型

这里只列举最简单的一类流行病模型——无移除的流行病模型. 这类模型假定：

(1) 感染通过一个团体内成员之间的接触而传播，感染者不因死亡、痊愈或隔离而被移除；

(2) 团体是封闭性的，总人数为 N，开始时不妨只有一个感染者；

(3) 团体中各成员之间接触机会均等，因此易感者转为感染者的变化率与当时的易感人数和感染人数的乘积成正比.

记时刻 t 的易感人数为 S，感染人数为 I，根据以上假设即可建立以下微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta SI. \tag{5-28}$$

其中

$$S + I = N, \tag{5-29}$$

$$I(0) = 0. \tag{5-30}$$

将式(5-29)代入式(5-28)，得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta S(N - S). \tag{5-31}$$



分离变量并积分，得

$$\int \frac{\mathrm{d}S}{S(N-S)} = -\int \beta \mathrm{d}t,$$

即得

$$\frac{1}{N}\ln\frac{S}{N-S} = -\beta t + C. \tag{5-32}$$

根据初始条件(5-30)，可得

$$C = \frac{1}{N}\ln(N-1),$$

将上式代入(5-32)，即有

$$\frac{1}{N}\ln\frac{S}{N-S} = -\beta t + \frac{1}{N}\ln(N-1).$$

整理后得：

$$S = \frac{N(N-1)}{(N-1)+e^{\beta Nt}}. \tag{5-33}$$

式(5-33)描述了易感人数随时间变化的动态关系，其图形如图5-4所示.

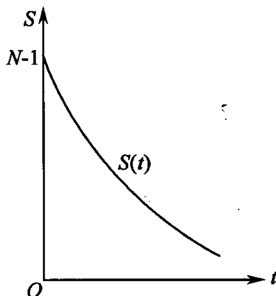


图5-4

从式(5-33)或图5-4中可以看出：当 $t\to\infty$ 时，$S(t)\to 0$，从而有 $I(t)\to N$. 这一结果预示：对于无移除的流行病最终将导致团体全部成员被感染.

【思考与练习】

放射性碘 $^{131}\mathrm{I}$ 广泛用来研究甲状腺的功能，$^{131}\mathrm{I}$ 的瞬时放射速率与它当时所存在的量成正比. 已知 $^{131}\mathrm{I}$ 的初始质量为 M_0，$^{131}\mathrm{I}$ 的半衰期为8天$\left(\text{即 } t=8 \text{ 时}，M=\frac{1}{2}M_0\right)$，问20天后 $^{131}\mathrm{I}$ 还剩多少？

习　题　五

1. 从以下的等式中找出微分方程，再从微分方程中找出线性微分方程、常系数线性微分方程，并标明各微分方程的阶数

(1) $y''-3y'+2y=x$;　　(2) $y^2-3y+2=x$;

(3) $y^2-3y'+2=0$;　　(4) $(y')^2=2x+5$;

(5) $\mathrm{d}y=(2x+5)\mathrm{d}x$;　　(6) $y''=\sin x$;

(7) $\mathrm{d}y=(2x+3y-5)\mathrm{d}x$;　　(8) $y''=\cos^2 y\sin x$;

(9) $y''-(y')^2+2y=x$;　　(10) $3y''-2y'+4y=0$;

(11) $xy'''+2y''+x(y')^4+y=0$;　　(12) $2y''=3y'$.

2. 判断下列函数是否是已给微分方程的解，如果是，指出是通解还是特解

函数	微分方程
(1) $y=Ce^{-2x^2}$	$y'+4xy=0$
(2) $y=-5e^{-2x^2}$	$y'+4xy=0$
(3) $y=\dfrac{(C-x^2)}{2x}$	$(x+y)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0$
(4) $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$	$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2 y=0$

(5) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$　　　　$2y'' + y' = y$

(6) $y = e^x$　　　　$\dfrac{d^4 y}{dx^4} - 2\dfrac{d^3 y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2 y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 0$

3. 一阶线性非齐次微分方程的通解是如何组成的？如何推导一阶线性非齐次微分方程的通解公式？

4. 求下列微分方程的通解或特解

(1) $xy' - y\ln y = 0$;

(2) $(1 + e^x) yy' = e^x$;

(3) $y' - xy' = a(y^2 + y)$;

(4) $y' = 10^{x+y}$;

(5) $xy' + y = x^2 + 3x + 2$;

(6) $y' + y = x$;

(7) $y' = y\ln y\cos x \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$;

(8) $\sin y\cos x\,dy = \cos y\sin x\,dx$, $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$;

(9) $\dfrac{x}{1+y}dx - \dfrac{y}{1+x}dy = 0$, $y(0) = 1$;

(10) $e^x dx = dx + \sin 2y\,dy$, $y\big|_{x=1} = \dfrac{\pi}{6}$;

(11) $\cos x\dfrac{dy}{dx} + y\sin x = 1$, $y\big|_{x=0} = 0$;

(12) $(t+2)\dfrac{dx}{dt} = 3x + 1$, $x(0) = 0$;

(13) $xy' + 1 = 4e^{-y}$, $y(-2) = 0$;

(14) $xy' + y - e^x = 0$, $y(1) = 3e$;

(15) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$, $y(\pi) = 1$.

5. 求下列二阶微分方程的通解或特解

(1) $y'' = x + \sin x$;

(2) $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

(3) $y'' = 1 + (y')^2$;

(4) $y'' = -\dfrac{y'}{x}$;

(5) $\begin{cases} y'' + (y')^2 = 1, \\ y\big|_{x=0} = 0, \\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

6. 求下列二阶常系数线性齐次微分方程的通解或特解

(1) $4y'' - 20y' + 25y = 0$;

(2) $2y'' + 2y' + 3y = 0$;

(3) $y'' - y' - 2y = 0$;

(4) $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;



(5) $y''-5y'+6y=0$，$y(0)=\frac{1}{2}$，$y'(0)=1$；

(6) $y''+4y'=0$，$y(1)=1$，$y'(1)=-4$；

(7) $3y''-2y'-8y=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=2$；

(8) $\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+5x=0$，$x\big|_{t=0}=0$，$x'\big|_{t=0}=1$.

第六章　概率论基础

概率论是研究随机现象的数量规律的一门学科，在自然科学、社会科学和技术科学的所有领域里都有广泛的应用．概率论的基本理论和方法是医学统计学、卫生统计学、临床流行病学等课程的基础，是医学基础研究和临床实践不可缺少的重要工具．本章内容包括关于随机事件的概率和随机变量的分布等基本概念和方法．

第一节　随机事件及概率

一、随机试验与随机事件

在临床实践中经常可以观察到，由于个体差异，大致相同的条件或环境下，不同的病人有不同的症状或表现．在2007年7月29日的一场煤矿事故里，69名矿工被困井下76小时后全部获救．有的矿工获救后十几小时就大体恢复到了以前的身心状态，而另有几位极度衰弱的矿工，住院好多天，精神和体力仍然不能恢复正常．实际上，在井下被困时，他们的危险处境是完全一样的．

反过来的情形也可以观察到．一个轻微腹泻的病人，究其病因，可能是下列之一：胃肠道感染；消化不良；理化损伤；食物不适；睡觉着凉；精神紧张等等．

上面的事例，都可以归纳为：**条件相同，结果相异**．这是现实世界里普遍存在的一类现象，即：在相同条件下对其进行重复观察或实验，会出现多种不同的结果，而且，无法在事前预先知晓会出现其中的哪一种结果．这类现象就称为**随机现象**(**random phenomenon**)．

对随机现象进行观察或试验统称为**随机试验**(**random test**)，简称试验．随机试验的任何结果都称为**随机事件**(**random event**)，简称事件，常用A、B、C等符号表示，试验中，如果出现了某种事件A，就称事件A发生了．例如，以A表示“一个人的血型测定为O型”这一随机事件，如果某个志愿献血者被测定是O型，则事件A发生了．

在试验中肯定出现的事件称为**必然事件**(**certain event**)，记为U；在试验中肯定不出现的事件，称为**不可能事件**(**impossible event**)，记为V. 必然事件和不可能事件本质上是确定的，因此可以认为，确定性现象是随机现象的特殊情况，就如常量是特殊变量一样．

二、事件的关系与运算

随机试验的不同结果之间存在有一定的联系，因此需要讨论事件之间的关系和运算．

1．包含与相等

若事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B**包含**(**implication**)事件A或称事件A含于事件B，记为$B\supset A$，或$A\subset B$．例如，A＝‘考试成绩优异’，B＝‘考试及格’，则$A\subset B$．

若事件A包含事件B，同时事件B也包含事件A，即$A\supset B$且$B\supset A$，则称事件A与事件B**相等**(**equivalence of events**)，记为$A=B$．例如掷骰子两次，记A＝两次的点数之和是奇数，B＝恰有一次得偶数点，则$A=B$．任何事件A，总是有$V\subset A\subset U$．

2．事件的和与差

事件A与事件B至少有一个发生，则这一事件称为事件A与事件B的**和**(**sum of events**)，记为$A+B$．例如，化验甲、乙两人的血样是否含某种病毒，A＝甲的血样阳性，



B = 乙的血样阳性，C = 混合血样为阳性，显然 $C = A + B = B + A$.

通常 n 个事件的和记为 $\sum_{i=1}^{n} A_i$，表示 A_1、A_2、…、A_n 这 n 个事件至少有一个发生.

事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**差**(**difference**)，记为 $A - B$. 例如，A = "考试及格"，B = "考试成绩优异"，则当考试结果为及格但非优异时，事件 $A - B$ 就发生了. 如果 $B \supset A$，则有：$B = (B - A) + A$. 对于任意的 A、B，总有 $A + B = (B - A) + A = (A - B) + B$.

3. 事件的积

若事件 A 与事件 B 同时发生，则这一事件称为事件 A 与事件 B 的**积**(**product of events**)，记为 AB. 化验甲、乙两人的血样，A = "甲血样为阴性"，B = "乙血样为阴性"，C = "混合血样为阴性"，则有 $C = AB = BA$.

n 个事件的积通常记为 $\prod_{i=1}^{n} A_i$，表示 A_1、A_2、…、A_n 这 n 个事件同时发生.

4. 互不相容关系

若事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $AB = V$，则称事件 A 与事件 B **互不相容**(**mutually exclusive**)或**互斥**. 如果 A_1、A_2、…、A_n 中任意两个事件都是互不相容的，则称 A_1、A_2、…、A_n 两两互不相容. 例如，一个家庭有两个孩子. 记 A_1 = 两个都是男孩，A_2 = 哥哥和妹妹，A_3 = 姐姐和弟弟，A_4 = 两个都是女孩. 显然 A_1、A_2、A_3、A_4 是两两互不相容的事件.

5. 互逆关系

若事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生，即同时满足 $A + B = U$ 和 $AB = V$，则称事件 A 与 B 为**互逆事件**(**complementary events**)或**对立事件**，通常把 A 的逆事件记为 $\bar{A}$，表示"A 不发生"这一事件. 例如，对学生进行考核，以事件 A 表示"及格"，以事件 B 表示"不及格"，则 A、B 互为逆事件，即 $A = \bar{B}$ 且 $B = \bar{A}$.

一对互逆的事件 A 和 $\bar{A}$，把随机试验的全部结果分成互不重叠的两类，例如，男和女，是和非，阳性和阴性，成功和失败，等等. 在语法上，一个陈述前加上"不"（或者"非"）就得到其对立事件.

可以验证事件的运算满足如下关系：

(1) 交换律 $A + B = B + A$，$AB = BA$

(2) 结合律 $A + (B + C) = (A + B) + C$，$A(BC) = (AB)C$

(3) 分配律 $A(B + C) = AB + AC$，$(A + B)C = AC + BC$

(4) $\overline{A + B} = \bar{A}\,\bar{B}$，$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$，$A - B = A\bar{B}$

随机事件的关系和运算与集合的关系和运算是完全相似的，例如对任意事件 A、B，总有：$A \subset A + B$，$B \subset A + B$，$AB \subset B$，$AU \subset A$，$AV \subset V$ 等.

通常，把一次试验的每一个可能结果称为**基本事件**(**elementary event**)或**简单事件**，一个事件是否称为基本事件取决于试验目的. 例如，考试结果，一般 0 分至 100 分中的每个分数都是一个基本事件；若只需知道是否通过了考试，则只有及格和不及格这两个基本事件. 进行一次试验，全部基本事件中必然会出现某一个，因此，由所有基本事件所组成的集合作为事件就是必然事件，复合事件是其子集，这样，便可参照表 6-1 将事件与集合进行对比来加以理解.

表 6-1

符　号	概　率　论	集　合　论
U	必然事件	全集
V	不可能事件	空集



续表

符　号	概　率　论	集　合　论
$A\subset U$	事件 A	U 的子集
$A\subset B$	事件 A 发生必导致事件 B 发生(事件的包含)	集合 A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与 B 相等(事件的相等)	集合 A 与 B 相等
$A+B$	事件 A 与 B 至少有一个发生(事件的和)	集合 A 与 B 的并集
AB	事件 A 与 B 同时发生(事件的积)	集合 A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而 B 不发生(事件的差)	集合 A 与 B 的差集
$AB=V$	事件 A 与 B 不可能同时发生(互不相容)	集合 A 与 B 无公共元素
$\overline{A}$	事件 A 不发生(A 的逆事件)	集合 A 的补集

例 6-1　依次检查三人的肝脏功能，记 A = “第一人正常”，B = “第二人正常”，C = “第三人正常”，试写出这一试验的全部基本事件以及下列事件：(1)只有第一人正常；(2)只有一人正常；(3)三人都不正常；(4)至少有一人正常；(5)只有第三人不正常.

解　全部基本事件为：ABC，$AB\overline{C}$，$A\overline{B}C$，$\overline{A}BC$，$A\overline{B}\,\overline{C}$，$\overline{A}B\overline{C}$，$\overline{A}\,\overline{B}C$，$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$，则以上事件可分别表示为：

(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$或 $A-B-C$ 或 $A-(B+C)$；

(2) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

(3) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(4) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$ 或 $A+B+C$；

(5) $AB\overline{C}$或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$.

例 6-2　设 A、B、C 是三个事件且满足 $A+B+C=U$，试用 A、B、C 表示下列事件：(1)A 不发生；只有 A 发生；只有 A 不发生；(2)A、B 同时出现；A、B 同时不出现；A、B 不同时出现；(3)不是“只有 A 发生”；不是“只有 A 不发生”；(4)A 发生且不是“只有 A 发生”；(5)A 不发生且不是只有 A 不发生；(6)只有 A 出现或只有 A 不出现；(7)(不是“只有 A 发生”)且(不是“只有 A 不发生”).

解　A、B、C 不一定互斥，但是，因为 $A+B+C=U$，每次试验，至少要出现其中一个. 题目里提到的“只有”和“不”是针对 A、B、C 三个事件而言的，所以要留意“只有”和“不”的位置.

(1) A 不发生 $=\overline{A}$；只有 A 发生 $=A\overline{B}\,\overline{C}$；只有 A 不发生 $=\overline{A}BC$；

(2) A、B 同时出现 $=AB$；A、B 同时不出现 $=\overline{A}\,\overline{B}$；$A$、$B$ 不同时出现 $=\overline{AB}$；

(3) 不是“只有 A 发生” $=\overline{A\overline{B}\,\overline{C}}=\overline{A}+\overline{\overline{B}}+\overline{\overline{C}}=\overline{A}+B+C$；

不是“只有 A 不发生” $=\overline{\overline{A}BC}=\overline{\overline{A}}+\overline{B}+\overline{C}=A+\overline{B}+\overline{C}$；

(4) A 发生且不是“只有 A 发生” $=A\,\overline{A\overline{B}\,\overline{C}}=A(\overline{A}+B+C)=A\overline{A}+AB+AC=A(B+C)$；

(5) A 不发生且不是只有 A 不发生 $=\overline{A}\,\overline{\overline{A}BC}=\overline{A}(A+\overline{B}+\overline{C})=\overline{A}(\overline{B}+\overline{C})$；

(6) 只有 A 出现或只有 A 不出现 $=A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}BC$；

(7) (不是“只有 A 发生”)且(不是“只有 A 不发生”) $=(\overline{A}+B+C)(A+\overline{B}+\overline{C})$

$=A(B+C)+(\overline{B}C+B\overline{C})+\overline{A}(\overline{B}+\overline{C})=AB+AC+\overline{B}C+B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}$.

三、概率的定义

给病人服用药物后，医生不但要知道病人可能有哪些反应，还要知道每种反应出现的可能性大小.

随机试验中，事件 A 发生的可能性的大小定义为事件 A 的概率(**the probability of event A**)，记为 $P(A)$. 任何事件 A，$P(A)$都是 0 至 1 间的实数，若事件 A 和事件 B 相等，



则$P(A)=P(B)$．对于必然事件和不可能事件，规定：$P(U)=1$ 和 $P(V)=0$．如果 $A\subset B$ 则 $P(A)\leqslant P(B)$．因此对任何事件 A，总有

$$0=P(V)\leqslant P(A)\leqslant P(U)=1.$$

这里的定义只规定了概率的性质，没有给出确定 $P(A)$ 的方法．在长期的实践中，人们摸索出几种不同的确定概率的方式：其中一种方式是，在重复实验中通过观察来统计出事件 A 的概率；还有一种方式是，就事件 A 发生所需要的条件，通过理论分析来计算出事件 A 的概率．不同的方式适用于不同的场合．

1．概率的统计定义

定义 6-1 设在相同条件下进行的 n 次试验中，随机事件 A 发生了 m 次，则称比值 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 的**频率**(**the frequency of** A)，记为

$$f_n(A)=\frac{m}{n} \tag{6-1}$$

对任何试验，都有 $0\leqslant f_n\leqslant 1$，$f_n(U)=1$，$f_n(V)=0$．而且，若 $A\subset B$，必有 $f_n(A)\leqslant f_n(B)$．

定义中 $f_n(A)$ 带有下标 n 是用来表示频率 $f_n(A)$ 的取值与试验次数 n 有关．例如，掷一个均匀的硬币，设事件 $A=$得到正面，则当 $n=1$ 时，$f_1(A)$ 只能等于 0 和 1；而当 $n=2$ 时，$f_2(A)$ 可以等于 0、1/2、1，余类推．但在一次具体的实验里 $f_n(A)$ 等于多少只能在实验完成后才能确定．

可见，对任何随机事件 A，在 n 次重复试验中 A 发生的次数 m 和频率 $f_n(A)$ 都是随机的．不过人们发现，虽然 n 很小时，$f_n(A)$ 的取值非常任性，而且起伏很大，但是当 n 充分大以后，频率就开始趋于稳定．下面这些例子都说明了**频率的稳定性**(**the stability of frequency**)．

例 6-3 历史上数位数学家先后做过大量的投掷硬币试验，结果如表 6-2 所示．

表 6-2

试 验 者	投掷次数(n)	出现正面次数(m)	频率(m/n)
De Morgan	2046	1061	0. 5186
Buffon	4040	2048	0. 5069
Pearson	12000	6019	0. 5016
Pearson	24000	12012	0. 5005

由于投掷硬币试验只产生“正面”和“反面”两种结果，因此，凡 Yes or No 一类的对立事件的概率，都能够用掷币试验来实证．计算机模拟时，更是简化为用 1 和 0 来代替 A 和 $\overline{A}$．

例 6-4 人类的男婴出生率总在 0. 517 上下，各种族各地区之间并无实质性差异．甚至于某些遗传性疾病的发生率也是如此．人类遗传学家 G. Wealer 和助手花费数十年时间追踪了 18000 多名儿童及其家系成员，于 1927 发表调查结果，在 9040 个男性中，725 人患有红绿色盲；在 9072 个女性中，40 人患有红绿色盲．并由此推断，红绿色盲是 X 染色体隐性遗传疾病．以后的研究表明，男性患红绿色盲的几率是女性的 16 倍，与 Wealer 的结果是吻合的．

例 6-5 根据 Brillouin 在 1956 年发表的结果，对总量大约有 4 千万字母的英文文字材料所作抽样统计，英文 26 个字母的使用率是很稳定的．E、T、O、A 等出现的频率远远高于 X、J、Q、Z 等．实际上，各种语言，包括计算机语言，都有类似规律．

可见，随机现象固然具有偶然性，同时也有必然性．必然性表现为大量试验中，一个随机事件的频率总是围绕着某一个定值而波动，并且波动的幅度越来越小，随机现象的这

种统计规律性表明随机事件的概率与频率有密切的联系.

定义 6-2 设在同一条件下重复进行 n 次试验，事件 A 出现 m 次，若试验次数 n 足够大，频率$\frac{m}{n}$稳定地在某一确定值 p 的附近摆动，则称 p 为事件 A 的概率，记为

$$P(A)=p \tag{6-2}$$

此定义为**概率的统计定义**(**the statistical definition of probability**)，提供了求概率的近似方法，即当试验次数足够大时，事件 A 的概率近似地等于事件 A 的频率. **医学统计学**(**medical statistics**)中，所谓患病率、死亡率、治愈率等就是指相应的频率，统计例数相当多时，也可理解为相应的概率，并用频率值来估计相应的概率值.

例 6-6 某医院用一种新药治疗老年性气管炎，疗效见表 6-3，求临床治愈率.

表 6-3

治疗结果	临床治愈(A)	明显好转(B)	症状缓解(C)	无效(D)	合计
例数(m)	83	180	117	23	403
频率(m/n)	0.206	0.477	0.260	0.057	1.00

解 这里的病例数 403 可认为足够大，故可以用临床治愈频率来近似表示本题所求的概率，即 $P(A)=\frac{m}{n}=0.206$，当然，例数越多，这个近似值就越值得信赖.

概率的统计定义仍然具有下列性质：

(1) 对任何事件 A，恒有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(2) 必然事件的概率为 1，即 $P(U)=1$；不可能事件的概率为零，即 $P(V)=0$.

(3) 若 $A\subset B$ 则 $P(A)\leqslant P(B)$ 故总有 $P(V)\leqslant P(A)\leqslant P(U)$.

2. 古典概型

例 6-7 一个正六面体的均匀骰子，各面分别为 1、2、3、4、5、6 点. 投掷一次，记：

A = 得到 1 点，B = 得到偶数点，C = 点数不大于 4 点.

由于**所有结果**无非是 1、2、3、4、5、6 点之一，且得到 1、2、3、4、5、6 点之一的**机会是均等的**(因为骰子正且匀)，很自然地可以断定：$P(A)=1/6$，$P(B)=3/6=1/2$ 以及 $P(C)=4/6=2/3$.

早期的数学家们注意到，相当多的随机试验都具有类似的理想化特征：

(1) 试验的所有可能结果为有限个，记为 $E_1、E_2、\cdots、E_n$，且 $\sum_{i=1}^{n}E_i=U$(完备性)；

(2) 事件 $E_1、E_2、\cdots、E_n$ 两两互不相容，即当 $i\neq j$ 时，$E_iE_j=V$(互不相容性)；

(3) 事件 $E_1、E_2、\cdots、E_n$ 发生的可能性相等，即 $P(E_k)=\frac{1}{n}$，$k=1,2,\cdots,n$.（等可能性）. 因此，如果诸 E_k 中有 m 个包含在事件 A 里，则可以认为，事件 A 的概率为 m/n.

具有特征(1,2,3)的基本事件 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 称为**等概基本事件组**.

定义 6-3 设 $E_1、E_2、\cdots、E_n$ 是试验的等概基本事件组，其中事件 A 所包含的基本事件数为 m，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件的总数}}=\frac{m}{n} \tag{6-3}$$

这个定义称为**概率的古典定义**(**classical definition of probability**)，亦称古典概型. 原则上，古典概型不依赖随机试验的实际操作. 只要能确定随机试验的等概基本事件组，并计算其总数，再计算出所求事件包含的基本事件个数，就能完成概率计算. 在这些运算



中，常用到一些排列组合公式，见学习指导书.

例 6-8 带活动门的小盒子里有采自同一巢的 20 只工蜂和 10 只雄蜂，现随机地放出 5 只做实验，求其中有 3 只工蜂的概率.

解 设 A = "任取 5 只蜜蜂有 3 只是工蜂"，依题意可知，基本事件总数

$$n = C_{30}^5 = 142506,$$

事件 A 所包含的基本事件数

$$m = C_{20}^3 C_{10}^2 = 51300,$$

所以

$$P(A) = \frac{C_{20}^3 C_{10}^2}{C_{30}^5} = \frac{51300}{142506} = 0.360.$$

把这个例子抽象为一般化的问题是：从 a 只工蜂和 b 只雄蜂中不放回地取出 n 只，其中有 k 只工蜂($n \leqslant \min[a,b], 0 \leqslant k \leqslant n$)的概率为：

$$P_n(k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}, \quad (k = 0,1,\cdots,n) \tag{6-4}$$

称为**超几何分布(hypergeometric distribution)**.

例 6-9 有 6 匹赛马，编号为 1、2、3、4、5 和 6. 比赛时，它们越过终点的顺序(共 6! 种)是等可能的. 记 A = 1 号马跑在前三位，B = 2 号马跑在第二位. 求 $P(A)$、$P(B)$ 和 $P(AB)$.

解 已知 6 匹赛马的全排列共 $n = 6!$ 种. 当 1 号马在前三位中任意占一位之后，让另 5 匹赛马在剩下的 5 个位置上全排列，有 5! 种不同方式，故 $m_A = 3 \times 5!$，则 $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{3 \times 5!}{6!} = \frac{1}{2}$. 类似，$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$. 至于事件 AB，让 2 号马解决 2 号位，则 1 号马只有 1 号位和 3 号位两种选择，于是，$P(AB) = \frac{m_{AB}}{n} = \frac{2 \times 4!}{6!} = \frac{1}{15}$.

例 6-10 一个袋中装有外形完全相同的 a 只白球和 b 只黑球，现任意地把这些球从袋中一个一个地全部摸出来，问第二个是黑球的概率是多少?

解 设 A = 第 2 个球是黑球. 假设这 $a+b$ 个球编了号码因而能相互区别. 如果把这 $a+b$ 个球摸出来依次摆成一排，不同的摆法(对应于不同的摸球结果)有 $n = (a+b)!$ 种. 现在，首先从 b 个黑球中取出一个放在第二个位置，这有 b 种选法；其次，把剩下的 $a+b-1$ 个球随意地摸出来依次摆放在剩下的 $a+b-1$ 个位置上，这后一种做法有 $(a+b-1)!$ 种，则共有 $m = b(a+b-1)!$ 种选取方式使第二个位置上是黑球，这些都是事件 A 所包含的，所以

$$P(A) = \frac{b(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{b}{a+b}.$$

如果记 A_k = 第 k 个是黑球，$k = 1,2,\cdots,a+b$，同理 $P(A_k) = b/(a+b)$ 对所有 k 都成立，由此知**抽样结果的概率与抽样顺序无关**.

像掷币和投骰一样，抽牌和摸球，也是数学家们热衷的游戏之一. 摸球模型是概率论里最常用的攻关利器. 在生命科学里，常用来拟合基因漂移、人口结构、传染病扩散、正常细胞和癌细胞的竞争等问题.

例 6-11 一个袋中装有 a 只白球和 b 只黑球，$a \geqslant 0$ 而 $b > 0$. 另一个大盒子中装有非常多的白球和黑球，其中，白球和黑球的比例分别为 q 和 p，$p + q = 1$. 现在，每次从袋中取出一个黑球，然后从大盒子中随机地取出一个球，并且放回袋中. 重复这些操作，直到袋中无黑球为止. 数学家提出问题是，平均要操作多少次，袋中首次无黑球?

已知人体免疫系统的T细胞粗分为CD4和CD8两种，正常人的CD4和CD8之比约为6:4. 近来发现，虽然早期AIDS病人的T细胞总量和正常人大致一样，但是CD4和CD8两种T细胞的比例却在不断下降. 新近的模型假设，人体免疫系统的补偿机制不区分受损T细胞类型，固定地按照6:4的比例生成CD4和CD8，以保持CD4和CD8的比例不变. 但是，如果HIV病毒专门攻击CD4细胞，CD4细胞就会越来越少，导致免疫系统的崩溃. 从感染HIV病毒到免疫系统失效，平均要多少时间？这个问题与上面的摸球模型非常类似. 解决这样的问题，需要后面几节的理论和方法.

【思考与练习】

1. 射击3次，记A=恰好命中一次，B=首发就命中，判断下列关系中哪些是正确的：
(1) $A\subset B$；(2) $A=B$；(3) $A\supset B$；(4) $AB=V$；(5) $A+B=U$；(6) $B=\overline{A}$.
2. 若A和B互不相容且$\overline{A}$和$\overline{B}$亦互不相容，则A和B是相互对立的吗？
3. 若A和B是相互对立的，是否也有AC和BC相互对立？
4. 概率的统计意义是用频率$f_n(A)$来描述的，是否$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(A)=P(A)$成立？

第二节　概率的基本公式

一、概率的加法公式

定理6-1　设A、B为任意两个事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).\tag{6-5}$$

用古典概型来加以说明：设等概基本事件有n个，A包含m_1个基本事件，B包含m_2个基本事件，A与B包含的相同的基本事件个数为k，即AB包含的基本事件个数为k，因此$A+B$包含的基本事件个数应为m_1+m_2-k个，故有

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2-k}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}-\frac{k}{n}=P(A)+P(B)-P(AB).$$

如果A、B互不相容，由$AB=V$，而$P(V)=0$，立即可得：

推论1　若A、B为互不相容的两个事件，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)\tag{6-6}$$

一般地，若A_1、A_2、…、A_n两两互不相容，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).\tag{6-7}$$

推论2　对任一事件A，有

$$P(A)=1-P(\overline{A}).\tag{6-8}$$

因为$A+\overline{A}=U$，$A\overline{A}=V$，所以，$P(A+\overline{A})=P(U)=1$，由推论1，得$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$，故有$P(A)=1-P(\overline{A})$.

推论3　若事件$A\supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B).\tag{6-9}$$

因为$A\supset B$，有$A=(A-B)+B$，由于$(A-B)$与B互不相容，根据推论1，有

$$P(A)=P(A-B)+P(B),$$

所以

$$P(A-B)=P(A)-P(B).$$



例 6-12 某地区居民中，血型为 O、A、B、AB 型的各占 46%、31%、15%和 8%，现有一名 B 型血的病人需要输血，试问当地居民可给他输血的概率是多少？

解 根据医学常识，只有 O 型或 B 型的人方可给 B 型的病人输血，设 E_1 = 被检者是 O 型，E_2 = 被检者是 B 型；以频率代替概率，有 $P(E_1)=0.46$，$P(E_2)=0.15$，且 E_1 与 E_2 互不相容，而"可给 B 型病人输血"这一事件是 E_1 与 E_2 的事件之和，由推论 1，所求概率为：

$$P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2)=0.46+0.15=0.61.$$

例 6-13 一批小白鼠中，有 30%注射过药物 A，25%注射过药物 B，两种药物都注射过的占 20%. 如果从中任意取出 1 只，没有注射过任何一种药物的概率是多少？

解 从这批小白鼠中任意取出 1 只，记

$$A=\text{注射过药物 A},\ B=\text{注射过药物 B},$$

则已知条件是

$$P(A)=0.3,\ P(B)=0.25,\ P(AB)=0.2,$$

而所求概率为 $P(\bar{A}\,\bar{B})$. 因为：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.25-0.2=0.35$$

所以

$$P(\bar{A}\,\bar{B})=1-P(A+B)=1-0.35=0.65$$

若 A_1、A_2、…、A_n 不是两两互不相容，公式 6-7 就会比较复杂，例如，

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

二、概率的乘法公式

1. 条件概率

例 6-14 假定男、女的出生率相同，现考察有两个孩子的家庭，依大小顺序两个孩子为(男,男)、(男,女)、(女,男)、(女,女)是等概基本事件组，记 A = 至少有一个女孩，B = 大孩子是女孩，根据古典概型，容易求出它们的概率：

$$P(A)=\frac{3}{4},\ P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

若已知事件 A 发生，问事件 B 发生的概率. 因有这一附加条件，现在所有可能的基本事件为 A 所包含的(男,女)、(女,男)、(女,女)这 3 个，其中有两个也包含在 B 中，则 B 的概率就为 2/3，这个概率记为

$$P(B\mid A)=\frac{2}{3}.$$

显见，$P(B)\neq P(B\mid A)$，但是可以验证：

$$P(B\mid A)=\frac{2}{3}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

定义 6-4 对事件 A 和 B，若 $P(A)\neq 0$，则称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{6-10}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率(the conditional probability of B given A).

例 6-15 (续例 6-13)，若取到 1 只没有注射过药物 B 的小白鼠，它也没有注射过药物 A 的可能性有多大？

解
$$P(\bar{A}\mid\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\,\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{0.65}{1-0.25}=0.867.$$

例 6-16 （续例 6-9），设已知 $B=2$ 号马跑在第二位，求 $A=1$ 号马跑在前三位的概率.

解法一 用古典概型. 因为事件 B 已经发生，所以其余 5 匹马可能的排列共 5! 种，其中有 $2\times4!$ 种排列保证事件 A 发生，故 $P(A|B)=2\times4!/5!=2/5$.

解法二 用条件概率公式. $P(A|B)=P(AB)/P(B)=(1/15)/(1/6)=6/15=2/5$. 类似，$P(B|A)=2/15$.

由条件概率定义的表达式，很容易推导出

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B). \tag{6-11}$$

这就是概率的乘法公式. 其中前一式需 $P(A)\neq0$，而后一式需 $P(B)\neq0$.

可以验证，条件概率具有无条件概率的所有性质. 例如：

(1) $P(A|B)\geqslant0$;

(2) $P(U|B)=1$，$P(V|B)=0$;

(3) $P(A|B)=1-P(\overline{A}|B)$;

(4) $P(A_1+A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$.

特别地，当 $B=U$ 时，条件概率就化为无条件概率了.

概率的乘法公式还可能推广到有限多个事件的情况，即

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \tag{6-12}$$

例 6-17 产妇分娩胎儿的存活率为 $P(L)=0.98$. 又知产妇分娩中剖腹产所占的比例为 $P(C)=0.15$，而剖腹产的活产率为 $P(L|C)=0.96$，如果一个产妇是自然产，胎儿的存活率有多大？

解 注意到 $P(L\overline{C})=P(L)-P(LC)=P(L)-P(C)P(L|C)$，所求概率为

$$P(L|\overline{C})=\frac{P(L\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(L)-P(C)P(L|C)}{1-P(C)}=\frac{0.98-0.15\times0.96}{1-0.15}=0.9835.$$

例 6-18 某种疾病能导致心肌受损害，若第一次患该病，则心肌受损害的概率为 0.3，第一次患病心肌未受损害而第二次再患该病时，心肌受损害的概率为 0.6，试求某人患病两次心肌未受损害的概率.

解 设 A_1 = 第一次患该病心肌受损害，A_2 = 第二次患该病心肌受损害，由题设可知：

$$P(A_1)=0.3,\ P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=0.7,$$

$$P(A_2|\overline{A_1})=0.6,\ P(\overline{A_2}|\overline{A_1})=1-P(A_2|\overline{A_1})=0.4.$$

两次患该病心肌未受损害的概率为

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})=0.7\times0.4=0.28.$$

2. 事件的独立性

例 6-19 观察三次生产其中有几个男孩，可以用掷币三次其中有几个正面来模拟. 记：

A = 至少有两个正面，B = 有正面有反面，C = 有奇数个正面，

如果硬币是均匀的，按古典概型有

$$P(A)=1/2,\ P(B)=3/4,\ P(C)=1/2.$$

假定，掷币的结果是事件 A 出现了. 有多大的可能，事件 B 也出现？有多大的可能，事件 C 也出现？不难计算出

$$P(B|A)=3/4=P(B) \quad 和 \quad P(C|A)=1/4\neq1/2=P(C).$$

一般情形，一个事件的发生与否，是否会**改变另一事件的概率**，取决于这两个事件间



是否存在有某种相互关联性. 这是随机事件特有的重要性质.

定义 6-5 设 A、B 是随机事件，且 $P(A)\neq 0$ 若

$$P(B)=P(B\mid A)$$

则称**事件 B 独立于事件 A（B is independent of A）**.

事件 B 独立于事件 A 时，若 $P(B)\neq 0$，则事件 A 亦独立于事件 B，即**独立性（independence of events）**是相互的. 事实上，若 B 独立于 A，由乘法公式及 B 对于 A 的独立性知

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B).$$

两边同除以 $P(B)\neq 0$ 得

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)}.$$

右边一个等式给出

$$P(A)=P(A\mid B).$$

证明事件 A 也是独立于事件 B 的，因而 A、B 相互独立. 同时还得到

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

反之，由这一等式及乘法公式立即可推知 A、B 相互独立，于是有：

定理 6-2 事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件是

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{6-13}$$

容易看出，必然事件 U 和不可能事件 V 与任何一个事件 A 都相互独立. 因为总成立：

$$P(UA)=P(A)=P(U)P(A) \quad 和 \quad P(VA)=P(V)=P(V)P(A).$$

自然，必然事件 U 和不可能事件 V 也是相互独立的. 能够证明，如果 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B 以及 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都是相互独立的.

例 6-20 如果幼儿在学语前就失聪，则很难学会说话，故有"十聋九哑"一说，表明失聪与失语的关系. 那么，辨音能力是否也影响辨色能力呢？临床积累的资料见表 6-4：

表 6-4

	耳聋(A)	非聋($\overline{A}$)	合 计
色盲(B)	0.0004	0.0796	0.0800
非色盲($\overline{B}$)	0.0046	0.9154	0.9200
合计	0.0050	0.9950	1.0000

解 两者是否相互联系可由事件 A 和 B 是否相互独立来判断. 已知

$$P(A)=0.005,\ P(B)=0.08,\ P(AB)=0.0004.$$

由于 $P(AB)=0.0004=P(A)P(B)$，故 A 与 B 相互独立，从而推断两种状态无联系.

例 6-21 有厂家申请抗病毒性感冒的新药生产许可证. 据申报材料称，临床试验阶段有 400 名志愿者参与实验. 其中 160 个服药者中 130 人痊愈，故痊愈率高达 0.813. 从申报材料还可看到，对照组（未服药者）的 240 人中也有 190 人痊愈. 那么，是否应该签发生产许可？

解 从临床试验志愿者中任意选出一人，记 A = 服药，B = 痊愈. 根据申报材料，有：

总痊愈率 $=P(B)=320/400=0.8$，服药者的痊愈率 $=P(B\mid A)=130/160\approx 0.813$.

两者很接近，可以认为 A 与 B 相互独立，即该药并无疗效. 实际上，对照组的痊愈率也有 0.792. 所以，应该拒签生产许可证.

若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是相互独立的，则诸 A_k 必两两相互独立：

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) \quad i\neq j,$$

并且必成立：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n). \quad (6\text{-}14)$$

但反之未必(反例见学习指导书). 仅有诸 A_k 两两相互独立或等式6-14成立，都不能保证 $A_1、A_2、\cdots、A_n$ 是相互独立的. 因此证明 n 个事件 $A_1、A_2、\cdots、A_n$ 是相互独立的则比较困难. 在实践中往往根据实际问题的背景判断其相互独立性，然后在概率计算中引用公式(6-14).

例 6-22 假设每个人血清中含有肝炎病毒的概率为0.004，现混合100个人的血清，求此混合血清中含有肝炎病毒的概率.

解 记 A_i = 第 i 个人的血清中含有肝炎病毒($i=1,2,\cdots,100$)，可以认为它们是相互独立的. 因此 $\overline{A_i}$($i=1、2、\cdots、100$)也是相互独立的，且 $P(\overline{A_i})=1-P(A_i)=1-0.004=0.996$，则：

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_{100})=1-P\,\overline{(A_1+A_2+\cdots A_{100})}=1-P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\cdots\overline{A_{100}})$$
$$=1-A(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_{100}})=1-0.996^{100}\approx 0.33.$$

可见，尽管每份血清含有肝炎病毒的可能性很小，但混合血清的概率却很大，这表明，小概率事件在大量重复试验中至少发生一次的概率，随试验次数的增加而变大. 在医学随机试验中，这种放大性效应是很普遍的现象，也是实际工作中常加考虑的因素.

本例顺便说明，如果 n 个事件 $A_1、A_2、\cdots、A_n$ 是相互独立的，则有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n}).$$

三、全概率公式和贝叶斯公式

借助简单事件的概率来推算复杂事件的概率，是概率论的基本方法之一. 实现化难为易的关键，是要把复杂事件剖分为两两互不相容的事件之和(图6-1).

1. 全概率公式

定理 6-3 设事件 $A_1、A_2、\cdots、A_n$ 两两互不相容，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，若 $\sum_{i=1}^{n}A_i=U$，则对任一事件 B，都有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i). \quad (6\text{-}15)$$

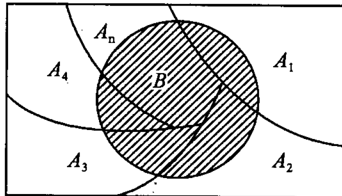


图6-1 事件的剖分

式(6-13)称为全概率公式.

证 因为

$$B=BU=B(A_1+A_2+\cdots+A_n)=A_1B+A_2B+\cdots+A_nB,$$

且上式右边 n 个事件是互不相容的(参看图6-1)，于是有

$$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+\cdots+P(A_nB)$$
$$=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+\cdots+P(A_n)P(B\mid A_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

以上的事件组 $A_1、A_2、\cdots、A_n$ 称为完备事件组，利用全概率公式的要点就是要找出这样一个完备事件组，然后将 B 剖分给 A_i，从而使概率计算得以简化.

例 6-23 某药厂用从甲、乙、丙三地收购而来的药材加工生产出一种中成药，三地的供货量分别占40%、35%和25%，且用这三地的药材能生产出优等品的概率分别为0.65，0.70和0.85，求从该厂产品中任意取出一件成品是优等品的概率.

解 以 A_i 分别表示抽到的产品的原材来自甲、乙、丙三地，B = 抽到优等品，则有：

$$P(A_1)=0.4,\ P(A_2)=0.35,\ P(A_3)=0.25;$$
$$P(B\mid A_1)=0.65,\ P(B\mid A_2)=0.7,\ P(B\mid A_3)=0.85.$$

由全概率公式(6-15)得：



$$P(B)=P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+P(B\mid A_3)P(A_3)$$
$$=0.65\times0.4+0.7\times0.35+0.85\times0.25=0.7175.$$

这里，产地 A_i 构成完备事件组，由于 B 发生时必以 A_i 之一为先决条件，因而总是可以把 B 分解到 A_i 上，而每一个 $P(B\mid A_i)P(A_i)$ 都已经由已知条件给出.

如果一件产品是优质品，它的材料来自甲地的概率有多大呢？这实际上是要计算 $P(A_1\mid B)$，假设 $P(B)$ 已知且不为零，按条件概率公式和乘法公式就应有：

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\frac{0.26}{0.7175}=0.3624.$$

可以看到，只要两两互不相容的事件组 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 的和包含了 B，则定理 6-3 和下面定理 6-4 仍然成立.

2. 贝叶斯公式

定理 6-4　设 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 是满足定理 6-3 中条件的完备事件组，且 $P(B)\neq0$，则在事件 B 已发生的条件下，事件 A_i 的条件概率为

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B\mid A_j)}\quad(i=1,2,\cdots,n).\tag{6-16}$$

式(6-16)就是**贝叶斯(Bayes)公式**，又称为逆概率公式.

证　由于

$$P(A_iB)=P(B)P(A_i\mid B)=P(A_i)P(B\mid A_i)$$

因此
$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{P(B)}.$$

利用全概率公式，得

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B\mid A_j)}.$$

例 6-24　在某一季节，一般人群中，疾病 D_1 的发病率为 2%，病人中 40%表现出症状 S；疾病 D_2 的发病率为 5%，其中 18%表现出症状 S；疾病 D_3 的发病率为 0.5%，症状 S 在病人中占 60%；问任意一位病人有症状 S 的概率有多大？病人有症状 S 时患疾病 D_1 的概率有多大？

解　这个课题里的完备事件组为 D_1、D_2、D_3，由已给数据知

$$P(D_1)=0.02,\ P(D_2)=0.05,\ P(D_3)=0.005,$$
$$P(S\mid D_1)=0.4,\ P(S\mid D_2)=0.18,\ P(S\mid D_3)=0.6.$$

由全概率公式得

$$P(S)=\sum_{i=1}^{3}P(D_i)P(S\mid D_i)=0.02\times0.4+0.05\times0.18+0.005\times0.6=0.02.$$

由逆概率公式得

$$P(D_1\mid S)=\frac{P(D_1)P(S\mid D_1)}{P(S)}=\frac{0.02\times0.4}{0.02}=0.4,$$

$$P(D_2\mid S)=\frac{0.05\times0.18}{0.02}=0.45,\ P(D_3\mid S)=\frac{0.005\times0.6}{0.02}=0.15.$$

在临床诊断中，贝叶斯方法是计算机自动诊断或辅助诊断的基本工具. 设有 n 种疾病 A_1、A_2、$\cdots$、A_n，称为疾病群，患这些疾病可能有的 m 种症候为 B_1、B_2、$\cdots$、B_m，称为症候群. 如果在逻辑上可以认为 A_i 与 B_j 构成因果关系，A 是因，B 是果，那么，贝叶斯公式中的 $P(A_i)$ 是 A_i 作为起因无条件发生的概率，称为**先验概率(prior probability)**，而 $P(B\mid A_i)$ 是在原因 A_i 出现的情况下 B(通常是若干个 B_j 的乘积)作为结果的条件概率，于是 $P(A_i\mid$

B)就是确实出现了该症状 B 的情况下推断存在病因 A_i 的概率，称为**后验概率(posterior probability)**. 公式中 $P(A_i)$ 可由以往的数据统计而得，$P(B \mid A_i)$ 可由所掌握的医学知识以及积累的临床资料来确定，由此求得 $P(A_i \mid B)(i=1,2,\cdots,n)$. 显然，$P(A_i \mid B)$ 中较大者所对应的病因 A_i，就是诊断中须重点考虑的对象. 在这里，A_i 构成完备事件组. 例 6-23 的分析过程如下表所示.

表 6-5 临床诊断的贝叶斯方法流程表

疾病群 D_i	D_1	D_2	D_3	概率之和
先验概率 $P(D_i)$	0.02	0.05	0.005	一般等于 1.00
条件概率 $P(S \mid D_i)$	0.4	0.18	0.6	一般不为 1.00
联合概率 $P(D_i)P(S \mid D_i)$	0.008	0.009	0.003	$P(S)=0.02$
后验概率 $P(D_i \mid S)$	0.4	0.45	0.15	一定等于 1.00

在习题中，完备事件组的先验概率之和都为 1，这对分清各组数字的概率意义很有用. 本例实际上还缺省了 D_4 = 没有疾病，则 $P(D_4)=0.925$ 且 $P(S \mid D_4)=0$，从而 $P(D_4 \mid S)=0$. 容易验证，补充了 D_4 后，表中第一行之和正好等于 1.

例 6-25 某执业医师认为：如果有 80%的把握断定病人患有某种癌症，就要建议病人做手术；否则就应该建议病人另外做一项特别的检查(这项检查费用昂贵且有痛苦)后再做决定. 对于这种癌症患者，其检验结果总是阳性；而对非癌症患者，其检验结果总是阴性. 一次应诊中，该执业医师只有 60%的把握断定病人 J 患有这种癌症，于是医师让病人 J 做了特别检查并且结果是阳性. 当医师建议病人 J 做手术时. 可是病人 J 马上告诉医师：J 是糖尿病患者. 这样一来事情就复杂了，因为一个糖尿病患者，即使没有患这种癌症，这项检查也有 30%的时候给出阳性的结果. 医师该怎么办，是建议做更多检查还是立即手术?

解 该执业医师面对的问题可以用 Bayes 分析来解决. 设 A = 病人 J 确有癌症；B = 病人 J 的检验结果是阳性. 显然，对执业医师来说，A 和 $\bar{A}$ 是病因，B 和 $\bar{B}$ 是症状. 观察到的是 B 而不是 $\bar{B}$.

	A = 病人 J 确有癌症	$\bar{A}$ = 病人 J 没有癌症	概率之和
先验概率	$P(A)=0.6$	$P(\bar{A})=0.4$	1.00
条件概率	$P(B \mid A)=1.0$	$P(B \mid \bar{A})=0.3$	
联合概率	$P(AB)=0.6\times1.0=0.6$	$P(\bar{A}B)=0.4\times0.3=0.12$	$P(B)=0.72$
后验概率	$P(A \mid B)=0.6/0.72=5/6$	$P(\bar{A} \mid B)=0.12/0.72=1/6$	1.00

因为 $P(A \mid B)=5/6=0.833>0.8$，按执业医师的经验，建议病人 J 立即手术.

例 6-26 Tom 的家谱(pedegree)如图 6-2 所示. B 超结果显示，Mary 怀上了一个男孩. 由于她的舅舅因肌萎缩综合征(DMD)而夭折，若不考虑基因突变，则知 Mary 的外婆 Barbara 必是一个 DMD 的携带者(carrier). 这样，Mary 是携带者的可能性为 1/4，从而，她的宝宝患 DMD 的风险就有 1/8.

Mary 的姐姐 Elle 有儿子 Tom. 如果 Tom 是 DMD 患者，则可推断，Alice 必是携带者，从而，Mary 的宝宝患 DMD 的风险仍为 1/8. 已知，Tom 是正常的. 此信息可能改变 Mary 是携带者的可能性，Tom 能向他的姨妈 Mary 说明她的未来宝宝的风险改变为多少吗?

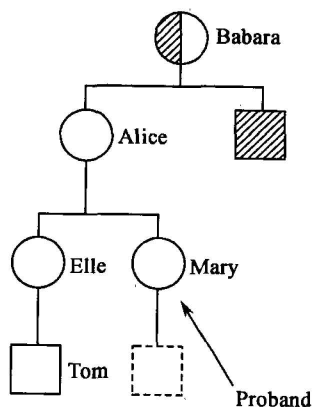


图 6-2 Tom 的家谱图



解 此为遗传咨询常见问题. 设 A = Alice 是 DMD 的携带者, E = Elle 是 DMD 的携带者, M = Mary 是 DMD 的携带者, 以及 T = Tom 是正常者. 若不计基因突变, 则 $P(A)=P(\overline{A})=1/2$, 并且

$$P(E)=P(A)P(E\mid A)+P(\overline{A})P(E\mid\overline{A})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{4},$$

$$P(\overline{E})=P(A)P(\overline{E}\mid A)+P(\overline{A})P(\overline{E}\mid\overline{A})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{3}{4}=1-P(E).$$

因此,

$$P(T)=P(E)P(T\mid E)+P(\overline{E})P(T\mid\overline{E})=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{7}{8}.$$

又因 $P(T)=P(A)P(T\mid A)+P(\overline{A})P(T\mid\overline{A})=\frac{1}{2}\cdot P(T\mid A)+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{7}{8}$, 故 $P(T\mid A)=\frac{3}{8}$.

于是,

$$P(A\mid T)=\frac{P(AT)}{P(T)}=\frac{P(A)P(T\mid A)}{P(T)}=\frac{3/8}{7/8}=\frac{3}{7}.$$

根据这一额外信息, Mary 是 DMD 的携带者的概率调整为

$$P(M\mid T)=P(M\mid AT)P(A\mid T)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{14}.$$

那么, Mary 未来宝宝的风险也就调整为 $3/28\approx 0.107143\approx 1/10$. 接近临床上的可接受概率.

在 1975 年, 两名美国学者, Murphy 和 Chase, 把上面遗传咨询的分析过程归结为例 6-26 的计算表形式, 并且推广到更复杂的家谱图, 使遗传咨询的系谱分析程序化. 其他例子见学习指导书.

四、独立重复试验和伯努利概型

随机试验中, 在相同条件下重复试验, 由于保持了试验条件不变, 各次试验的结果是相互独立的, 也就是每次试验中, 同一事件的概率保持不变, 则这样的一系列重复试验就称为**独立重复试验**(**independent repeated tests**). 例如, 测量 100 名正常新生儿的身长与体重, 如果他们之间没有遗传意义上的亲缘关系, 就是 100 次独立重复试验. 100 名学生参加期末考试, 如果他们之间没有任何形式的信息交流, 也是 100 次独立重复试验.

对于独立重复试验, 如果每次试验的结果只有 A 与 $\overline{A}$ 两个, 则在各次试验中 $P(A)=p$ 和 $P(\overline{A})=1-p=q$ 都保持不变. 第 i 次试验中 A 出现就记为 A_i, 若 $\overline{A}$ 出现就记为 $\overline{A}_i$, 那么依上所述, 对任何 i 都有:

$$P(A_i)=p \text{ 和 } P(\overline{A}_i)=1-p=q,\quad i=1,2,3,\cdots$$

于是在许多场合中有意义的问题是, 在 n 次这样的试验中 A 发生了多少次, 称这种情形为 n **重伯努利试验**(**Bernoulli trial**), 所对应的数学模型称为伯努利概型. 那么 "n 重伯努利试验中, 事件 A 正好出现 k 次" 这一事件, 即是:

$$A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n+\cdots+\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-k+1}\cdots A_n.$$

其中每一项表示: 在某 k 次试验中出现事件 A, 而在另外 $n-k$ 次试验中则出现 $\overline{A}$. 这种项共有 C_n^k 个, 而且两两互不相容. 对第一项的概率, 由于试验的独立性, 有

$$P(A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k)P(\overline{A}_{k+1})\cdots P(\overline{A}_n)=p^kq^{n-k}.$$

同理可得其他各项所对应的事件的概率均为 p^kq^{n-k}, 由概率的加法公式知 "n 重伯努利试验中, 事件 A 正好出现 k 次" 这一事件的概率为

$$P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k},\qquad k=0,1,2,\cdots,n.$$

又由二项式的展开式知，

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

于是有如下定理：

定理 6-5 n 重伯努利试验中，事件 A 出现 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,n. \tag{6-17}$$

并且

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1. \tag{6-18}$$

例 6-27 人们知道，性别与出生顺序(birth order)无关，遗传病也与出生序无关. 因此连续的生育就是伯努利试验. 父母都是某种隐性遗传病的杂合型时，子女罹患该遗传病的概率为 1/4，一对这样的夫妇生三个孩子有两个以上患病的概率有多大?

解 记 A 表示这一事件，$P_3(k)$ 表示生 3 个孩子有 k 个患病的概率，$k=1$，2，3，则

$$P(A) = P_3(2) + P_3(3) = 3(1/4)^2(3/4) + (1/4)^3 = 0.15625.$$

实际上“连续的生育”的子女不是非指同胞兄妹不可，也指一般情形，例如若干对这样的夫妇共有 10 个孩子，则其中患病的子女有 2 个或 3 个的概率为：

$$p = P_{10}(2) + P_{10}(3) = C_{10}^2(0.25)^2(0.75)^8 + C_{10}^3(0.25)^3(0.75)^7 = 0.5318.$$

例 6-28 有一大批药片，已知其潮解率为 20%，求抽检 10 片中有 2 片潮解的概率.

解 设 A 表示“抽检的药片潮解”，由于是一大批药片，“抽检 10 片有 2 片潮解”便可以看成是 10 次独立试验，

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 p^2 q^8.$$

其中 $p = P(A) = 0.2$，$q = 1-p = 0.8$，故所求的概率为

$$P_{10}(2) = C_{10}^2(0.2)^2 \times (0.8)^8 = 0.302.$$

须注意，若是从数量不大(例如 30 片)的药片中不放回地抽检 10 片，就不能看成是 10 次独立试验，因为每次抽样时的基本条件都在发生较大变化，故不适用伯努利概型，而要用古典概型来求解(参考前面例 6-8，例 6-10). 至于有放回地抽样，由于各次抽样都是独立的，因而总是适用伯努利概型.

【思考与练习】

1. 设 $P(A)P(B)>0$，下列论断中哪些是正确的?
   (1) 若 A 和 B 互不相容则 A 和 B 相互独立；
   (2) 若 A 和 B 相互对立则 A 和 B 相互独立；
   (3) 若 A 和 B 相互独立则 A 和 B 互不相容；
   (4) 若 A 和 B 相互独立则 A 和 B 相互对立.

2. 设 $P(B)>0$，事件 A 和 B 满足什么关系时，下列等式成立?
   (1) $P(A|B)=0$ (2) $P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}$ (3) $P(A|B)=1$

3. 某公司三名求职者竞聘同一个职位，他们中有一人已被随机选中，而另外两人将不得不离开公司. 公榜前，求职者 A 问公司人事经理：B 和 C 中谁会落选? 人事经理拒绝道：“我如果告诉你，那么你被公司聘任的机会就从 1/3 升到 1/2”. 人事经理的话有道理吗?

4. 证明或举反例：
   (1) $P(B|A)\leqslant P(B)\Rightarrow P(A|B)\leqslant P(A)$；$P(B|A)\leqslant P(B)\Rightarrow P(B|\bar{A})\geqslant P(B)$；
   (2) 若 $P(B|A)\leqslant P(B)$ 且 $P(C|B)\leqslant P(C)\Rightarrow P(C|A)\leqslant P(C)$.

第三节 随机变量及其概率分布

一、随机变量及其分布函数

1. 随机变量的概念

许多随机试验的结果表现为数量，例如：抽查 100 件产品发现的次品数 ξ，其可取值为 0、1、2、…、100；某地区在流行病高峰期被感染而患病的人数 ξ，可以为 0、1、2、…；测量某物体长度所产生的误差 ξ，随测量结果的不同而取不同的实数. 由于这些数量都受到种种偶然因素的影响而随机地取值，就把这种变量称为**随机变量**(**random variable**)，常用希腊字母 ξ、η、…或拉丁字母 X、Y、Z 等来表示.

有些试验结果初看起来与数值无关，例如，用某种药物对病人进行治疗，试验结果通常归结为“有效”与“无效”，它们并非数量. 但是，如果引入一个随机变量 ξ，以 $\xi=0$ 表示治疗无效，$\xi=1$ 表示治疗有效，于是试验的结果就是数量. 此时，ξ 表示治疗一位病人，其中治愈的人数.

由此，任何一个随机事件都可以用随机变量的不同取值来表示. 例如，“抽查 100 件产品中有 2 件次品”对应($\xi=2$)；“被感染的病人数超过了 70 人”对应($\xi>70$)；“测量误差在$[a,b]$范围内”对应($a\leqslant\xi\leqslant b$)，等等. 反之，**任意一个随机变量 ξ，它取特定值或处于某特定范围里，都是随机事件**，因而都有概率. 例如，对病人进行治疗，治愈率为 p，ξ 表示治疗一位病人，其中治愈的人数，则有 $P(\xi=1)=p$ 和 $P(\xi=0)=1-p=q$. 由此看到，在随机试验中，随机变量通过随机事件与概率联系起来了.

2. 概率分布函数

概率论的核心问题之一是，随机变量 ξ 怎样在整体上以统一的数学形式，把自己的取值状态与概率相对应起来，对一切实数 x，事件 $\xi\leqslant x$ 的概率是否有一致的表达?

定义 6-6 设 ξ 为一随机变量，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，令

$$F(x)=P(\xi\leqslant x) \tag{6-19}$$

称 $F(x)$为随机变量 ξ 的**分布函数**(**distribution function**).

在(6-19)式中，左端表明分布函数 $P(\xi\leqslant x)$在代数形式上是任意实数的函数，而右端则表明了分布函数 $F(x)$的实际概率含义. 分布函数 $F(x)$有如下性质：

(1) $F(x)$是单调不降的非负函数，即若 $x_1<x_2$，则 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

(2) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，且 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；

(3) $F(x)$是右连续的，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$.

依据分布函数，就能方便地求解随机变量 ξ 取不同值或不同范围值的概率. 例如

$$P(a<\xi\leqslant b)=P(\xi\leqslant b)-P(\xi\leqslant a)=F(b)-F(a)$$

$$P(\xi>b)=1-P(\xi\leqslant b)=1-F(b)$$

$$P(\xi<b)=F(b-0)$$

$$P(\xi=b)=F(b)-F(b-0)$$

这几种形式的概率计算都只用到分布函数的一个或两个不同值，可见，如果随机变量的分布函数是已知的，则概率的计算得以简化并归结为函数的运算或是查表运算.

随机变量的取值情况很不相同. 有的只取有限或可列无限个数值，这类随机变量称为离散型随机变量；另一类随机变量则可取某一区间上的任意实数，称之为非离散型随机变量. 在非离散型随机变量中，主要讨论称为连续型的随机变量.



二、离散型随机变量及其分布列

1. 离散型随机变量的分布列和分布函数

定义 6-7 若随机变量 ξ 所能取的值是 x_1、x_2、…、x_k…，并以概率 p_k 取值为 x_k，即

$$P(\xi = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{6-20}$$

则称 ξ 为**离散型随机变量**(**discrete random variable**)，式(6-19)为 ξ 的**概率分布**(**probability distribution**). 若 ξ 的概率分布用下表形式给出，则称此表为**分布列**(**law of probability**).

ξ	x_1	x_2	…	x_k	…
P	p_1	p_2	…	p_k	…

分布列中 p_k 满足下面两个关系式：

$$p_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2 \cdots$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1.$$

对于离散型随机变量，其分布函数为

$$F(x) = P(\xi \leqslant x) = \sum_{x_k \leqslant x} P(\xi \leqslant x_k) = \sum_{x_k \leqslant x} p_k, \tag{6-21}$$

其中求和是对所有满足不等式 $x_k \leqslant x$ 的指标 k 进行的. 这时 $F(x)$ 是一个阶梯函数，它在每个 x_k 处有一跳跃度 p_k，由 $F(x)$ 也可唯一决定 x_k 及 p_k，因此用分布列或分布函数都能描述离散型随机变量.

例 6-29 有不严重的腹泻时可服用盐酸黄连素来止泻，首剂有效率为 0.6；若无效就再用一剂，有效率为 0.8；如果还无效，可再用第三剂，有效率为 0.9. 如果还无效，医生会另择其他药或采取其他措施. 记 ξ = 服用该药的次数，试写出 ξ 的分布列和分布函数.

解 以 A_i 表示第 i 次给药收效，$i = 1, 2$. 已知

$$P(A_1) = 0.6, \ P(\bar{A}_1) = 0.4, \ P(A_2 \mid \bar{A}_1) = 0.8, \ P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1) = 0.2$$

则：

$$P(\xi = 1) = P(A_1) = 0.6,$$

$$P(\xi = 2) = P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1) P(A_2 \mid \bar{A}_1) = 0.4 \times 0.8 = 0.32,$$

$$P(\xi = 3) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2 \mid \bar{A}_1) = 0.4 \times 0.2 = 0.08.$$

于是 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3
P	0.6	0.32	0.08

根据式(6-20)逐段求 ξ 的分布函数：

当 $x < 1$ 时，$F(x) = P(\xi \leqslant x) = 0$

当 $1 \leqslant x < 2$ 时，$F(x) = P(\xi \leqslant x) = P(\xi = 1) = 0.6$

当 $2 \leqslant x < 3$ 时，$F(x) = P(\xi \leqslant x) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 0.6 + 0.32 = 0.92$

当 $3 \leqslant x$ 时，$F(x) = P(\xi \leqslant x) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0.6 + 0.32 + 0.08 = 1$

于是分布函数如下，分布函数的几何表示参见图 6-3：

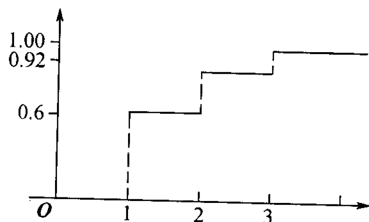


图 6-3 离散型分布函数



$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ 0.6, & 1\leqslant x<2;\\ 0.92, & 2\leqslant x<3;\\ 1, & 3\leqslant x.\end{cases}$$

与独立重复试验相联系的离散型随机变量，常见的有两点分布，二项分布，几何分布以及泊松分布.

2. 两点分布

定义 6-8 如果随机变量 ξ 的分布列如下表，则称 ξ 服从以 p 为参数的**两点分布(two points distribution)**.

ξ	0	1
P	$1-p$	p

任何一个只有两种可能结果的随机现象都可以用服从两点分布的随机变量来描述. 例如产品的合格与不合格，治疗疾病的有效与无效，化验结果是阳性与阴性，一次实验成功与否，婴儿的性别，对一个问题的回答是 Yes 与 No，等等. 两点分布也可如下表示

$$P(\xi=1)=p,\ P(\xi=0)=1-p=q. \tag{6-22}$$

3. 二项分布

定义 6-9 如果随机变量 ξ 的概率分布为

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,n\quad(0<p<1,q=1-p). \tag{6-23}$$

则称 ξ 服从参数为 n，p 的**二项分布(binomial distribution)**，记为 $\xi\sim B(n,p)$.

显然，$n=1$ 时的二项分布就是两点分布. 反之，在 n 重伯努利试验中，如果事件 A 在每一次试验中发生的概率都是 p，定义

$$\xi_i=\begin{cases}1, & 第\ i\ 次试验事件\ A\ 发生;\\ 0, & 第\ i\ 次试验事件\ A\ 不发生.\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

则 $P(\xi_i=1)=p$，$P(\xi_i=0)=1-p=q\quad(i=1,2,\cdots,n,)$，即 ξ_i 服从相同的两点分布，而且 ξ_1、ξ_2、$\cdots$、ξ_n 是相互独立的，则

$$\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$$

就表示 n 重伯努利试验中 A 发生的次数，比较公式 6-17 和公式 6-23，就知 ξ 服从二项分布 $B(n,p)$，于是，二项分布又称为 n 个独立的两点分布之和.

联系到实际工作中的抽样问题，放回抽样时 n 个样品中的次品数服从二项分布，不放回抽样(如例 6-8)时 n 个样品中的次品数服从超几何分布. 当抽样对象的批量很大时，二者在数值上很接近，因而可相互替代. 故实践中常采用不放回抽样(因为操作更方便)，但分析时采用二项分布(因为计算更简便)，如同例 6-28.

例 6-30 注射一种免疫苗可能有 0.1%的人会出现不适反应，有 10 个人接种. 试求：

(1) 有 1 人，2 个人出现不适反应的概率；

(2) 求至少一人产生反应的概率.

解 每个人是否会出现反应是相互独立的，因此观察 10 人的反应就是 10 重伯努利试验. 记 ξ 表示接种的 10 人中产生反应的人数，则 ξ 服从二项分布 $B(10,0.001)$. 所求概率分别为：

$$P(\xi=1)=C_{10}^1p^1q^9=10\times0.001\times0.999^9=0.00990,$$

$$P(\xi=2)=C_{10}^2p^2q^8=45\times0.001^2\times0.999^8=0.00004,$$

$$P(\xi\geqslant1)=1-P(\xi=0)=1-q^{10}=1-0.999^{10}=1-0.99004=0.00996<0.01.$$

由于$P(\xi\geqslant1)$还不到0.01，这样的结果在实际中是不容易出现的，因此，如果这10人中确实有人出现了反应，就有理由怀疑该疫苗的不适反应率p远大于0.001.

4. 泊松分布

定义 6-10 如果随机变量ξ的概率分布为

$$P_k=P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots \tag{6-24}$$

则称ξ服从参数λ的**泊松分布(Poisson distribution)**，记为$\xi\sim\pi(\lambda)$，其中$\lambda>0$.

当独立重复试验的次数n趋于无穷大时，二项分布就趋于泊松分布，如下面的泊松定理所述(证明从略).

定理 6-6 设随机变量ξ_n服从二项分布，即

$$P(\xi_n=k)=C_n^kp_n^k(1-p_n)^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,n$$

这里p_n与n有关. 若$\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda\geqslant0$，则

$$\lim_{n\to\infty}P(\xi_n=k)=\lim_{n\to\infty}C_n^kp_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots$$

在n较大时，泊松分布的计算比二项分布的计算简便得多，因此根据这个定理，当n足够大而p相对较小时，二项分布$B(n,p)$可用泊松分布$\pi(\lambda)$来作近似计算，即

$$P_n(k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \tag{6-25}$$

这里λ用np代替. 在实际应用中，当$n\geqslant10$，$p\leqslant0.1$时就可利用式(6-25)计算二项分布的概率.

例 6-31 根据以往的统计资料，某地新生儿染色体异常率为1%，问100名新生儿中有染色体异常的不少于2名概率是多少?

解 设ξ为“100名新生儿中染色体异常的人数”，$p=0.01$，利用二项分布公式，有

$$\begin{aligned}P(\xi<2)&=P(\xi=0)+P(\xi=1)\\&=C_{100}^0(0.01)^0(0.99)^{100}+C_{100}^1(0.01)^1(0.99)^{99}\\&=0.3660+0.3697=0.7357,\end{aligned}$$

$$P(\xi\geqslant2)=1-P(\xi<2)=1-0.7357=0.2643.$$

由于$n=100$很大，而$p=0.01$很小，因此，可以利用泊松分布作为二项分布的近似. 其中$\lambda=np=100\times0.01=1$，故有

$$P(\xi=0)\approx\frac{1^0}{0!}e^{-1}=0.3679,\ P(\xi=1)\approx\frac{1^1}{1!}e^{-1}=0.3679,$$

$$P(\xi\geqslant2)=1-(P(\xi=0)+P(\xi=1))=1-0.3679\times2=0.2642.$$

这里用泊松分布近似地代替二项分布，误差不算很大.

例 6-32 设一个人在一年里的感冒次数近似地服从参数为5的泊松分布. 一种抗感冒的新药(以大剂量的vitamin C为主要成分)新近上市. 据说，持续服用，75%的服用者，每年的感冒次数降为参数为3的泊松分布. 另外的25%的服用者，本药没有作用. 有一个人在一年里持续服用此药，在这一年里他感冒了两次. 此药对此人有效的概率是多少?

解 记ξ为一年里此人的感冒次数. E=此药对此人有效. 由已给条件知

$$P(E)=0.75\quad 和\quad P(\overline{E})=0.25$$

并且，

$$P(\xi\leqslant2\mid E)=P(\xi\leqslant2\mid\lambda=3)=e^{-3}\left(1+3+\frac{3^2}{2}\right)=\frac{17}{2}e^{-3}=0.423190,$$

$$P(\xi\leqslant2\mid\overline{E})=P(\xi\leqslant2\mid\lambda=5)=e^{-5}\left(1+5+\frac{5^2}{2}\right)=\frac{37}{2}e^{-5}=0.124652.$$



于是

$$P(\xi\leqslant2)=P(E)P(\xi\leqslant2\mid E)+P(\overline{E})P(\xi\leqslant2\mid\overline{E})$$
$$=0.75\times0.423190+0.25\times0.124650=0.348555,$$

则所求概率为

$$P(E\mid\xi\leqslant2)=\frac{P(E)P(\xi\leqslant2\mid E)}{P(\xi\leqslant2)}=\frac{0.75\times0.423190}{0.348555}=0.910595.$$

泊松分布是一种重要的离散型分布，在生物学、医学、公共卫生事业等方面较为常见．例如，容器内的细菌数，生多胞胎的例数，稀有疾病的发病人数，放射性分裂过程中落到某区域的质点数，单位时间来到医院看病的人数，护士值班台被呼叫次数，一定时间内实验材料的消耗数量，大都服从泊松分布．甚至在意想不到的场合也能见到泊松分布，见例 6-50.

至于不放回抽样，不是独立重复试验的场合，其中的成功次数，作为随机变量，是服从**超几何分布**(**hypergeometric distribution**)的，如例 6-8 所示.

三、连续型随机变量及其概率密度函数

1．连续型随机变量的密度函数和分布函数

人们早就注意到，有些随机变量的取值是充满一个区间的(有限的或无限的).

以人类的身高为例来分析．首先考虑个体的情形．一个人从出生到死亡，其身高大体上要经历增长，保持和减少的过程，分布在一个有限的区间内．而且在每一天，早上和晚上的身高也不一样．即使在特定的时刻测量其身高，其读数还是分布在一个大小由尺子精度决定的区间内．比如在区间[174.5,175.5]内，如果他的平均身高是 175cm.

其次考虑群体的情形．一群人的身高总是有差异的，因此，如果人类有无限多个个体，所有的身高值就充满了一个区间．如此看来，无论 ξ 表示一群中任意一个人的身高，还是特定一人任意时刻的身高，都是一个连续取值的随机变量.

由于连续取值的随机变量的可取值是某区间内的所有实数，难以罗列其取每个值的概率；况且，更有实际意义的问题并不是它取某个特定值的概率，而是它取值于某个子区间内的概率．例如，对于测量误差，有兴趣的是它不超出某界限的概率；检测各种医学生化指标，研究者关心的是该指标是否处于正常范围，等等.

用什么方式来表征连续取值的随机变量呢？人们想到，可以对这一随机变量进行反复测量，把所得数据分组统计，利用频率近似于概率这一性质，就能初步地获得该变量的近似分布，并逐步改进其精确程度从而最终获得准确的描述．大致过程见下例.

例 6-33 有 $n=57$ 位腹部长有恶性肿瘤的病人作了肿瘤切除术．术后称得肿瘤重量(单位:克)如表 6-6 所示，其中，最轻者 340 克，最重者 2240 克.

表 6-6 57 例腹部肿瘤重量的原始数据(单位:g)

340	595	652	709	765	851	1021	1191	1247	1389	1616	2098
340	624	680	765	794	879	1021	1191	1276	1389	1786	2240
340	624	680	765	794	879	1077	1219	1304	1418	1843	
454	652	709	765	794	907	1077	1219	1332	1446	1928	
539	652	709	794	851	907	1191	1219	1389	1446	1956	

为便于分析，首先把这批肿瘤重量的分布范围等分成 10 个区间，每个区间的跨度为 300g(原则上每个区间的跨度可以不相同)；其次，统计其观察数据出现在第 i 个区间里(事件 A_i)的频数，记为 n_i，频率 $f_i=n_i/n$，整理如表 6-7 中的左边 3 列所示；再次，以 $h_i=f_i/\Delta\xi_i$ 表示每一组的平均频率，见表 6-7 中的左边 4 列；最后，由表中数据作出**直方图**(**histogram**)如图 6-4 所示.

表 6-7　57 例腹部肿瘤重量的频率分布

$A_i=(\xi\in\Delta x_i)$ 重量分布区间	n_i = 频数	$f_i=n_i/n$ 频率	$h_i=f_i/\Delta x_i$ 频率/区间长度	累积频数	$P_i=\sum_{j\leq i}f_j$ 累积频率
300～500	****4	0.070175	0.035088	4	0.070175
500～700	*********9	0.157895	0.078947	13	0.228070
700～900	***************15	0.263158	0.131579	28	0.491228
900～1100	******6	0.105263	0.052632	34	0.596491
1100～1300	********8	0.140351	0.070175	42	0.736842
1300～1500	********8	0.140351	0.070175	50	0.877193
1500～1700	*1	0.017544	0.008772	51	0.894733
1700～1900	**2	0.035088	0.017544	53	0.929825
1900～2100	***3	0.052632	0.026316	56	0.982456
2100～2300	*1	0.017544	0.008772	57	1.000000

其中横坐标是重量，已按表中数据的分组对应地分成了若干小区间，第 i 个小区间的长度是 Δx_i，$i=1,2,\cdots,k$. 在每个小区间上，以 h_i 为高度，Δx_i 为宽度作一个矩形，矩形的面积即等于 $h_i\times\Delta x_i=(f_i/\Delta x_i)\times\Delta x_i=f_i$ = 第 i 组的频率，即**直方面积近似等于随机变量出现在该小区间内的概率**. 显然应有所有直方面积之和等于 1. 连接每个直方顶边的中点就得到一条由折线段组成的曲线，折线上点的高度(纵坐标)的意义同 h_i，而 ξ 出现在任意区间 (a,b) 里的概率也近似等于在 (a,b) 区间上曲线与横坐标轴之间所围面积；同理，ξ 出现在任意区间 $(-\infty,b)$ 的概率也近似等于在直线 $x=b$ 左侧，曲线与横坐标轴之间所围面积，表 6-7 最右一列是 $F(x)$ 的近似值.

现在设想 n 和 k 都趋于无穷大且每个 $\Delta\xi_i$ 都趋于无穷小的情形，连结无穷多个直方顶点的折线最终变成一条光滑的曲线(图 6-5). 容易理解，此曲线在 (a,b) 区间上与坐标轴围出的面积就准确地等于 ξ 出现在这区间里的概率. 假设这条曲线的解析式为 $f(x)$，则 $f(x)$ 的意义类似于 h_i，那么易见

$$P(a\leqslant\xi\leqslant b)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 或者 } F(x)=P(\xi\leqslant x)=\int_{-\infty}^x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

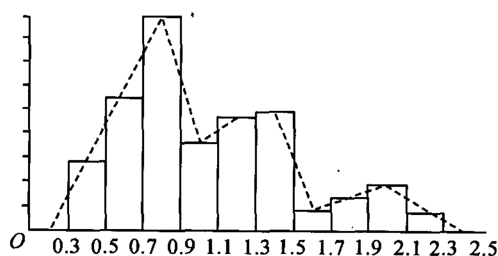


图 6-4　直方图

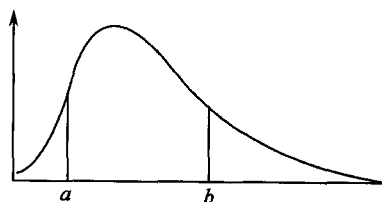


图 6-5　密度曲线示意图

定义 6-11　设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)$，如果存在非负函数 $f(x)$ 使对任意实数 x，都有

$$F(x)=P(\xi\leqslant x)=\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t\quad(-\infty<x<+\infty). \tag{6-26}$$

则称 ξ 为**连续型随机变量(continuous random variable)**，$f(x)$ 为 ξ 的**概率密度函数(probability density function)**简称概率密度或密度函数.

由定义，概率密度函数具有如下性质：

(1) $f(x)\geqslant 0$；



(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) = 1$;

(3) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = P(a<\xi\leqslant b) = F(b)-F(a)$.

从这些性质可知，概率密度曲线下包围的全部面积为 1，即 $P(\xi<+\infty)=1$ 对任何随机变量 ξ 成立. 由定积分性质，对任何实数 c，有 $P(\xi=c)=0$，这表明连续型随机变量取单个值的概率为零. 所以，概率为零的事件不一定是不可能事件. 一般地，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = P(a<\xi<b) = P(a<\xi\leqslant b) = P(a\leqslant\xi<b) = P(a\leqslant\xi\leqslant b).$$

即对于连续型随机变量 ξ，求 ξ 出现在某一区间里的概率时可不计较是否包含区间端点.

由于 $f(x)\Delta x \approx \int_x^{x+\Delta x} f(x)\mathrm{d}t = P(x<\xi\leqslant x+\Delta x)$ 是 ξ 取 x 邻近值的概率，$f(x)\Delta x$ 可与离散型随机变量中的 $P(\xi=x)$ 相当. 所以用密度函数描述连续型随机变量，在某种意义上与用分布列来描述离散型随机变量是相似的. 而分布函数 $F(x)$ 则统一地描述了这两类随机变量的概率分布.

例 6-34　连续型随机变量 ξ 的概率密度函数为 $f(x)=Ae^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$，求：

(1) 系数 A;

(2) ξ 的分布函数 $F(x)$.

解　由连续型随机变量密度函数的性质有：

(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}\mathrm{d}x = 2A\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = -2Ae^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 2A$，因此，$A=1/2$.

(2) ξ 的分布函数按定义为 $F(x)=P(\xi\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|t|}\mathrm{d}t$,

当 $x\leqslant 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}e^{x}$

当 $x>0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-e^{-x})=1-\frac{1}{2}e^{-x}$,

综合起来分布函数为，$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x\leqslant 0;\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x>0.\end{cases}$

常见的连续型随机变量有：均匀分布、指数分布和正态分布.

2. 均匀分布

定义 6-12　若随机变量 ξ 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b;\\ 0, & x<a \text{ 或 } x>b.\end{cases} \tag{6-27}$$

则称 ξ 在 $[a,b]$ 上服从**均匀分布**(**uniform distribution**)，记为 $\xi\sim U[a,b]$(图 6-6).

若 ξ 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布，对于满足 $a\leqslant c<d\leqslant b$ 的任意区间 $[c,d]$，均有

$$P(c<\xi<d)=\int_c^d \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{d-c}{b-a}.$$

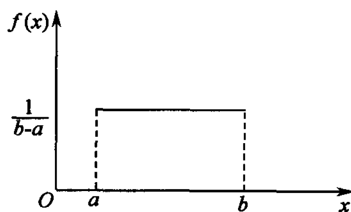


图 6-6　均匀分布的密度曲线

即 ξ 落在 $[a,b]$ 的任一子区间内的概率取决于该子区间的长度，而与子区间的位置无关，ξ 落在任意两个等长子区间内的概率是相等的，所以均匀分布又称为等概率分布.

例 6-35　假设测量儿童身高时，多出整厘米的部分就

舍去，那么舍去部分 $\xi \sim U[0,1]$（单位为 cm.）；如果是四舍五入，则舍入部分 $\beta \sim U[-0.5, 0.5]$. 人们打电话时，通话时间超出整分钟的秒数 $\eta \sim U[0,1]$，单位为分钟，若超出整分钟的秒数按 1 分钟计，则多计的时间 $\xi = 1 - \eta$ 仍然服从$[0,1]$区间上的均匀分布. 如果公交车每 15 分钟来一辆，则当乘客随机地来到车站后的等待时间 ξ 服从$[0,15]$区间上的均匀分布.

假定从早晨 7:00 起，公交车每 15 分钟来一辆. 一个乘客在 7:00 至 7:30 的任何时刻都可能到达车站. 求他搭上车时：(1)他等待不到 5 分钟的概率；(2)他等待超过 10 分钟的概率.

解 令 ξ 表示乘客在 7:00 以后抵达车站时的时刻，则 $\xi \sim U[0,30]$. 很明显，当且仅当他在 7:10 至 7:15 或在 7:25 至 7:30 来到车站，他的等待时间不会超过 5 分钟，如此，

$$P(10<\xi<15)+P(25<\xi<30)=\int_{10}^{15}\frac{dx}{30}+\int_{25}^{30}\frac{dx}{30}=\frac{1}{3}.$$

类似地，他的到站时刻在 7:00 至 7:05 或在 7:15 至 7:20，则待车时间不会少于 10 分钟，

$$P(0<\xi<5)+P(15<\xi<20)=\int_{0}^{5}\frac{dx}{30}+\int_{15}^{20}\frac{dx}{30}=\frac{1}{3}.$$

由此知道，这位乘客等待了 5 到 10 分钟才搭上车的概率为 1/3.

3. 指数分布

定义 6-13 如果随机变量 ξ 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}\quad(\lambda>0)\tag{6-28}$$

则称 ξ 服从参数为 λ 的**指数分布**（**exponent distribution**），其概率密度函数如图 6-7 所示.

又根据概率分布函数定义：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dx=0,\ x<0;$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x},\ x\geqslant 0.$$

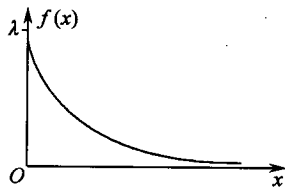


图 6-7 指数分布的密度曲线

故指数分布的概率分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}\quad(\lambda>0).\tag{6-29}$$

例 6-36 某些生化制品中的有效成分如活性酶，其含量会随时间而衰减. 当有效成分的含量降至实验室要求的有效剂量以下时，该制品便被视为失效. 制品能维持其有效剂量的时间为该制品的有效期，它显然是随机变量，记为 ξ. 多数情况下，可以认为 ξ 服从指数分布. 设它的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\end{cases}\quad(x\text{ 的单位为月}).$$

(1) 若从一批产品中抽出样品，测得有 50%的样品有效期大于 34 个月，求参数 λ 的值.

(2) 若一件产品出厂 12 个月后还有效，再过 12 个月后它还有效的概率有多大？

(3) 若说明书上标定的有效期 t 内有 70%的产品未失效，此有效期 t 为多长时间？

解 已知指数分布的分布函数为：$F(t)=P(\xi<t)=1-e^{-\lambda t}$，$\lambda>0$，则有：

(1) 由 $p(\xi>34)=1-F(34)=e^{-34\lambda}=0.5$，解出 $\lambda=-\frac{1}{34}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2/34\approx 0.02$.

(2) $P(\xi>24\mid\xi>12)=\dfrac{P(\xi>24)}{P(\xi>12)}=\dfrac{e^{-0.02\times 24}}{e^{-0.02\times 12}}=e^{-0.02\times 12}=P(\xi\geqslant 12)=e^{-0.24}=0.787.$

(3) 所求 t 满足 $P(\xi>t)\geqslant 0.7$，即 $P(\xi>t)=e^{-0.02t}\geqslant 0.7$，解出 $t<17.83$（月），约一年半.



指数分布常见于寿命问题中，如产品的无故障运行期，癌症病人术后存活期，短期记忆的持续期，克隆体的生理年龄演变等，是**生存分析**(**survival analysis**)的重要研究对象.

4. 正态分布

定义 6-14　如果随机变量ξ具有如下概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(-\infty<x<+\infty)\tag{6-30}$$

则称ξ服从参数为μ和σ的**正态分布**(**normal distribution**)，记为$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$. 特别地，当$\mu=0$且$\sigma=1$时，称为**标准正态分布**(**standard normal distribution**)，记为$N(0,1)$，其概率密度曲线特别记为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad(-\infty<x<+\infty).\tag{6-31}$$

正态分布又称高斯分布，是高斯研究误差理论时首先发现的. 正态分布的概率密度函数曲线$f(x)$称为正态曲线，如图 6-8 所示，具有如下性质：

(1) 连续性. $f(x)$是初等函数，定义域为$(-\infty,+\infty)$，而且对任何x值，均有$f(x)>0$，所以正态曲线是位于x轴上方的一条连续曲线.

(2) 对称性. 因为对于任意正数h，总有$f((\mu-h)=f(\mu-h)$，所以正态曲线以直线$x=\mu$为对称轴，当μ的大小变化时，正态曲线沿坐标轴左右平移.

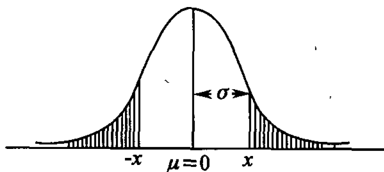


图 6-8　标准正态密度曲线

(3) 极值与拐点. 函数$f(x)$在$x=\mu$处有极大值$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$，曲线在$x=\mu+\sigma$和$x=\mu-\sigma$处各有一拐点.

(4) 渐近线. 因为$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，所以正态曲线以$x$轴为渐近线.

(5) 正态曲线下的面积等于 1，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}}\mathrm{d}x=1.$$

因此，当σ较大时，两个拐点相距较远，但由于总面积等于 1，故此时曲线的高度较小，因而曲线比较平坦；反之当σ较小时，两拐点靠得较近，曲线就比较陡峭. 综合起来，参数μ的大小决定正态曲线的位置，参数σ的大小则决定正态曲线的形状. 见图 6-9、图 6-10.

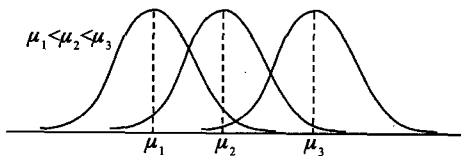


图 6-9　不同μ值的正态曲线

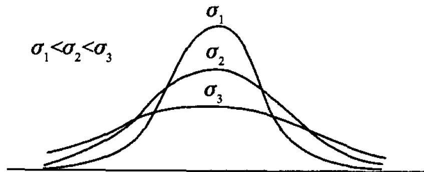


图 6-10　不同σ值的正态曲线

标准正态分布$N(0,1)$的分布函数$F(x)$特别地记为

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\tag{6-32}$$

本书末附有标准正态分布函数$\Phi(x)$的数值表(附表 2). 由标准正态密度曲线$\phi(x)$的对称性不难导出(图 6-8)

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)\tag{6-33}$$

当自变量 x 取负值时，就可利用式(6-33)查表计算. 而对一般正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，若令 $\frac{t-\mu}{\sigma}=u$，可得：

$$F(x)=P(\xi\leqslant x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(t-\mu)2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}e^{\frac{-u2}{2}}\mathrm{d}u=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

因此，若有 $\xi\sim N(\mu\sigma^2)$，则 $\eta=(\xi-\mu)/\sigma$ 是服从标准正态分布的，于是：

$$F(x)=P(\xi\leqslant x)=P\left(\eta\leqslant\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).\tag{6-34}$$

此过程称为把 ξ 标准化，因而对一般的正态分布，总是先将其标准化，然后借助公式(6-34)查标准正态分布表进行概率计算.

例 6-37 若 $\xi\sim N(0,1)$，求 $P(-2.5<\xi\leqslant 0.5)$.

解

$$\begin{aligned}&P(-2.5<\xi\leqslant 0.5)=P(\xi\leqslant 0.5)-P(\xi\leqslant -2.5)\\&=\Phi(0.5)-\Phi(-2.5)=\Phi(0.5)-[1-\Phi(2.5)]\\&=0.6915-(1-0.99380)=0.6853.\end{aligned}$$

例 6-38 设 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，试求 ξ 在区间 $(\mu-k\sigma,\mu+k\sigma)$ 内的概率，$k=1$，2，3.

解

$$\begin{aligned}&P(\mu-\sigma\leqslant\xi\leqslant\mu+\sigma)=P(\xi\leqslant\mu+\sigma)-P(\xi\leqslant\mu-\sigma)\\&=\Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right)\\&=\Phi(1)-\Phi(-1)=\Phi(1)-[1-\Phi(-1)]=2\Phi(1)-1=0.6853.\end{aligned}$$

同理可得

$$P(\mu-2\sigma\leqslant\xi\leqslant\mu+2\sigma)=\Phi(2)-\Phi(-2)=0.9545,$$
$$P(\mu-3\sigma\leqslant\xi\leqslant\mu+3\sigma)=\Phi(3)-\Phi(-3)=0.9973.$$

以上结果称为"3σ 原理"，指服从正态分布的随机变量 ξ，其取值落在距中心 μ 左右各 3σ 范围外的可能性极小，故医学统计一般把范围 $(\mu-1.96\sigma,\mu+1.96\sigma)$ 称为 ξ 的参考值范围(过去称为正常值范围).

例 6-39 在亲子鉴定庭审时，当事人出示证据表明，他在孩子出生的 290 天之前就出国公干，直到孩子出生 240 天之前才回国. 因此他声明，他不是孩子的父亲. 他的辩护人，一位生物学专家，能说服法官采信当事人的申辩吗?

解 首先，辩护人须指出，根据文献资料，人类怀孕期 T(从受孕到分娩的时间，以天计)大致服从正态分布，参数分别是 $\mu=270$ 和 $\sigma^2=100$. 其次，辩护人须计算出，若当事人是孩子的父亲，这样的可能性有多大. 最后再指出，因为此概率很小，当事人不大可能是孩子的父亲. 这样一个重要的概率等于

$$\begin{aligned}&P(T<240\text{ 或 }T>290)=P(T<240)+P(T>290)\\&=P\left(\frac{T-270}{10}<-3\right)+P\left(\frac{T-270}{10}>2\right)\\&=\Phi(-3)+[1-\Phi(2)]=[1-\Phi(3)]+[1-\Phi(2)]\\&=2-\Phi(2)-\Phi(3)=2-0.97725-0.99865\approx 0.02425.\end{aligned}$$

这一概率确实较小，在统计学上应支持当事人的申辩.

例 6-40 某地 12 岁年龄段的男童身高 $\xi\sim N(142.5,5.27^2)$，调查 1000 名 12 岁男孩，把其中最高的那些孩子分为一组，使这组人数不超过调查总人数的 5%. 试问这组孩子的身高不低于多少?

解 设该组孩子的身高不低于 h，则 h 应该是使关系式 $P(\xi>h)<0.05$ 成立的所有 h 可取值中最小的，不妨取 $P(\xi\geqslant h)\leqslant 0.05$，那么由

$$P(\xi > h) = 1 - P(\xi \leqslant h) = 1 - P\left(\frac{\xi - 142.5}{5.27} \leqslant \frac{h - 142.5}{5.27}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{h - 142.5}{5.27}\right) \leqslant 0.05$$

有

$$\Phi\left(\frac{h - 142.5}{5.27}\right) \geqslant 0.95.$$

查附表2，当 $u \geqslant 1.65$ 时，有 $\Phi(u) \geqslant 0.95$. 令$\frac{h - 142.5}{5.27} = u \geqslant 1.65$，解出 $h \geqslant 151.20$.

例6-41 根据美国盖洛普(Gallup poll)的调查统计，美军飞行员(USA Air Force pilots)的智商(IQ,记为ξ)大致分布为 $N(122,\sigma^2)$. 假设从调查数据中可知，至少有95%的飞行员其智商值ξ分布在108.28到135.72之间，即：$P(108.28 < \xi < 135.72) = p \geqslant 0.95$.

(1) 试以上述信息，推断参数σ之值.

(2) 求任意一名飞行员，其智商在115到129间的概率.

解 设$\xi \sim N(122,\sigma^2)$，由 $P(108.28 < \xi < 135.72) = p \geqslant 0.95$，有

$$p = P(108.28 < \xi < 135.72) = P\left(\frac{108.28 - 122}{\sigma} < \frac{\xi - 122}{\sigma} < \frac{135.72 - 122}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{13.72}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{13.72}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{13.72}{\sigma}\right) - 1 \geqslant 0.95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{13.72}{\sigma}\right) \geqslant 0.975.$$

查正态分布表，$u = 1.96$ 时 $\Phi(u) = 0.975$. 所以

$$\frac{13.72}{\sigma} = 1.96 \Rightarrow \sigma = \frac{13.72}{1.96} = 7.$$

则有

$$P(115 < \xi < 129) = P\left(\frac{115 - 122}{7} < \frac{\xi - 122}{7} < \frac{129 - 122}{7}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.68269.$$

【思考与练习】

1. 把医学试验与随机变量联系起来有何意义？通常有哪些途径？
2. 两个随机变量的分布函数完全相同，它们必是相等的随机变量吗？(参考例6-35)
3. 只要随机变量ξ的取值是连续的，ξ就是连续型随机变量吗？
4. 设ξ是一个离散型随机变量，下述说法正确与否？
   (1) 若ξ只取有限个整数值，则ξ服从二项分布；
   (2) 若ξ可取无限个整数值，则ξ服从泊松分布；
   (3) 若ξ可取无限个非负整数值，则ξ服从泊松分布.

第四节 随机变量的数字特征

实际问题中，往往需要能够概括地表达随机变量种种平均性质的量，即随机变量的数字特征，其中最基本的就是数学期望和方差，前者刻画了随机变量取值的相对集中位置或平均水平，后者刻画了随机变量取值围绕平均水平的离散程度.

一、数学期望

1. 离散型随机变量的数学期望

例6-42 某种疾病可以用A、B两种方法进行治疗，根据治疗效果给出评分标准，效果越好评分越高：痊愈100分，轻度并发症70分，严重并发症50分，死亡0分. 某医院用方法A治疗了50例，用方法B治疗了40例，其效果及对应例数见表6-8. 试问，哪一

种治疗方法更好？

表 6-8　两种治疗方案的比较

治疗效果	痊愈(例)(n_1)	轻度并发症(例)(n_2)	严重并发症(例)(n_3)	死亡(例)(n_4)	总例数(例)(n)
治疗方法 A	21	13	10	6	50
治疗方法 B	16	14	8	2	40

解　两种方法治疗的病人总数不一样，每种效果的人数也不一样，因而不能个别地比较. 两种方法的平均评分分别是：

$$\begin{aligned}\bar{x}_A &= (100\times21+70\times13+50\times10+0\times6)/50\\ &=100\times\frac{21}{50}+70\times\frac{13}{50}+50\times\frac{10}{50}+0\times\frac{6}{50}\\ &=\sum_{i=1}^{4}x_i\times\frac{n_i}{n}=70.2.\\ \bar{x}_B &= (100\times16+70\times14+50\times8+0\times2)/40\\ &=100\times\frac{16}{40}+70\times\frac{14}{40}+50\times\frac{8}{40}+0\times\frac{2}{40}\\ &=\sum_{i=1}^{4}x_i\times\frac{n_i}{n}=74.5.\end{aligned}$$

由于平均分代表的是各方法的整体水平，因此可以认为方法 B 较好一些. 上式中 x_i 是第 i 种治疗效果的分值，分式$\frac{n_i}{n}$表示第 i 种治疗效果出现的频率. 联想到频率与概率的关系，自然地引出了下面定义：

定义 6-15　设离散型随机变量 ξ 的分布列为

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k$ 存在，则称 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 为随机变量 ξ 的**数学期望**(**mathematical expectation**)或**均值**(**mean value**)，记为 $E\xi$，即

$$E\xi=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k \tag{6-35}$$

根据定义，二项分布 $\eta\sim B(n,p)$ 和泊松分布 $\xi\sim\pi(\lambda)$ 的期望分别是

$$E\eta=\sum_{k=0}^{n}kC_n^kp^k(1-p)^{n-k}=np \quad 和 \quad E\xi=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda.$$

例 6-43　为了评估一种大肠杆菌的毒效大小，动物实验中把大肠杆菌注入家兔腹腔以造成感染性休克，评分标准及概率如表 6-9 所示，试通过实验结果评价这种杆菌的毒效大小.

表 6-9　造成兔感染性休克的效果评价

感染效果	正　常	轻度血压下降脉博加快	血压下降静脉萎缩	休　克
毒效评分 ξ	0	50	80	100
概率 P	0.05	0.15	0.20	0.60

解　设毒效评分为 ξ，其分布列如上表所示，则 ξ 的平均值为：

$$E\xi=0\times0.05+50\times0.15+80\times0.20+100\times0.20=83.5.$$

由此可见这种杆菌的致毒能力是很高的.



例 6-44　设某大学每年新生 1 万人，其中 80%愿意参加体检. 体检需进行抽血化验，化验的方式有两种：①分别对每人单独检验，共需化验 $n=8000$ 次；②将 k 个人分为一组，同组的 k 个人的血样混合后化验，如果混合血样呈阴性反应，表明 k 个人的血液都为阴性，不再每人单独检验，这样 k 个人平均每人只需化验 $1/k$ 次；如果混合血样呈阳性，就需对这 k 个人再逐一进行化验，此时 k 个人平均每人需化验 $1+1/k$ 次. 假定化验呈阳性反应的概率是 p，而且不同人之间的反应是独立的. 试说明方法②能减少化验的次数.

解　记 $q=1-p$，则 k 个人的混合血样呈阳性反应的概率为 $1-q^k$，设 ξ 表示每个人的血需化验的次数，则按方法②验血时，ξ 的分布列为

ξ	$\frac{1}{k}$	$1+\frac{1}{k}$
P	q^k	$1-q^k$

则 ξ 的数学期望为

$$E\xi=\frac{1}{k}q^k+\left(1+\frac{1}{k}\right)(1-q^k)=1-q^k+\frac{1}{k}.$$

因此，n 个人平均需化验的次数为 $n(1-q^k+1/k)$. 若 $q^k-1/k>0$，就能减少验血次数. 当 p 已知时，适当地选择 k，使 $E\xi$ 达到最小，就可找到最佳的分组人数. 例如

该检验的阳性率 p	0.2	0.1	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.001
每组最佳血样数 k	3	4	5	6	6	8	11	32

如果 $p=0.1$，取 $k=4$，则 $E\xi=1-(1-0.1)^4+1/4=0.5939$，此时，工作量平均能减少 40%，总工作量大约为 $0.5939\times8000=4792$ 人.

根据期望的定义容易证明数学期望有如下性质：

(1) $E(c)=c$，c 为常数；

(2) $E(c\xi)=cE\xi$，c 为常数；

(3) $E(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)=E\xi_1+E\xi_2+\cdots+E\xi_n$；

(4) 设 ξ_1、ξ_2 相互独立，则 $E(\xi_1\xi_2)=E\xi_1E\xi_2$.

性质 1、2、3 统称为期望的线性性质，有助于简化期望的推算和数据的标准化过程.

例 6-45　求两点分布、二项分布 $B(n,p)$ 和泊松分布 $\pi(\lambda)$ 的数学期望.

解　设 ξ 服从参数为 p 的两点分布，则 $E\xi=1p+0q=p$.

若 $\eta\sim B(n,p)$ 则 η 是 n 个同分布的两点分布之和：$\eta=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$. 对于 $i=1,2,\cdots,n$ 都有 $E\xi_i=p$. 由性质(3)立刻得：$E\eta=np$，即二项分布 $B(n,p)$ 的数学期望为 np.

泊松分布 $\pi(\lambda)$ 是二项分布的极限分布，则二项分布的数学期望的极限就是泊松分布的数学期望，由定理 6-6 的推知：若 $\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda>0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}E\eta=\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda$，也就是若 $\xi\sim\pi(\lambda)$ 则 $E\xi=\lambda$.

例 6-46　实验大楼共 11 层（底楼和第 1、2、…、10 楼.）在底楼有 15 个同学一起挤进了电梯. 假定：每个人去 1 至 10 楼的可能性都一样，每个人去哪一楼是相互独立的. 电梯从底楼启动后到所有人都出梯，一个升程中平均要停几次？

解　设 ξ_k = 电梯在第 k 楼经停的次数，$k=1,2,\cdots,10$.

显然，只要有同学去第 k 楼，电梯在第 k 楼需要停 1 次；如果 15 个同学都不去第 k 楼，电梯在第 k 楼就无须停止. 所以，对所有 $k=1、2、\cdots、10$ 都有 $\xi_k=0$、1. 并且有：

$$P(\xi_k=0)=\left(\frac{9}{10}\right)^{15}=0.2059\quad 和\quad P(\xi_k=1)=1-P(\xi_k=0)=0.7941=E\xi_k.$$

记 ξ = 电梯在一个升程中经停的总次数，则 $\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{10}$，于是由性质(3)

$$E\xi = E(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{10}) = E\xi_1 + E\xi_2 + \cdots + E\xi_{10} = 0.7941 \times 10 = 7.941 \approx 8.$$

2. 连续型随机变量的数学期望

对于连续型随机变量ξ，设其概率密度函数为$f(x)$，设$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$是很小的一段区间长度，则$\xi$落在$[x_{i-1}, x_i]$中的概率近似为$f(x_i)\Delta x_i$. 因此$\xi$与某个以概率$f(x_i)\Delta x_i$取值$x_i$的离散型随机变量$\eta$近似，从而$\xi$的数学期望与$\eta$的数学期望近似. 按定义$E\eta = \sum_i x_i f(x_i)\Delta x_i$，和式对所有可能的$i$求和. 令$\lambda = \max\{\Delta x_i\}$且$\lambda \to 0$则

$$\lim_{\lambda \to 0} E\eta = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i}^{n} x_i f(x_i)\Delta x_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定义 6-16 设连续型随机变量ξ的概率密度函数为$f(x)$，若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，则称积分$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$为$\xi$的数学期望，记为$E\xi$，即

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6-36}$$

例 6-47 设随机变量ξ在区间$[a,b]$上均匀分布，试求$E\xi$.

解 已知 $\xi \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

根据数学期望定义，有

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

可见，在某一区间上均匀分布的随机变量ξ，其数学期望恰在该区间的中点. 如果η是电话超整分钟的秒数，则$\xi = 1 - \eta$是每个电话多计分数，$\xi \sim U(0,1)$，$E\xi = 0.5$(分).

例 6-48 若随机变量ξ服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，求$E\xi$.

解 正态变量ξ的概率密度函数是

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

按公式(6-36)其数学期望为

$$E\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x.$$

令$t = \frac{x-\mu}{\sigma}$，则$\mathrm{d}x = \sigma \mathrm{d}t$，故有

$$E\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t + \mu)e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma t e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

上式第一项中被积函数是奇函数，易知积分为零，又由密度函数性质，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = 1,$$

所以

$$E\xi = 0 + \mu \cdot 1 = \mu.$$

可见，正态分布$N(\mu, \sigma^2)$中的参数μ就是该分布的数学期望值.

二、方差

有的随机变量在其数学期望周围取值比较密集，有的则比较分散. 随机变量ξ的取值偏离其期望值$E\xi$的幅度，即$\xi - E\xi$，也是随机的，其平方$(\xi - E\xi)^2$的平均值即数学期望$E(\xi - E\xi)^2$应该反映了随机变量ξ离散程度的大小，于是引入下面定义.

定义 6-17 设随机变量ξ的数学期望为$E\xi$，若$E(\xi - E\xi)^2$存在，则称它为ξ的**方差**



(**variance**)，记为 $D\xi$，即

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 \tag{6-37}$$

显然，随机变量的方差 $D\xi \geqslant 0$，它的算术平方根 $\sqrt{D\xi}$ 称为**标准差**(**standard deviation**).

方差的定义 6.17 对于离散型和连续型随机变量都是统一的．但其展开式有所不同：

若 ξ 是离散型随机变量，其概率分布为：$P(\xi = x_k) = p_k$，$k = 1, 2, \cdots$，则

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - E\xi)^2 p_k. \tag{6-38}$$

若 ξ 是连续型随机变量，其概率密度函数为 $f(x)$，则

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(x_k - E\xi)^2 f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6-39}$$

另一方面，两者都成立

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E[\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2] = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2.$$

因此计算方差时，既可采用定义式 6-37，也可采用公式 6-40：

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2. \tag{6-40}$$

例 6-49 设 $\xi \sim \pi(\lambda)$．则 $E\xi = \lambda$．利用泊松分布的分布列和数学期望，得

$$E\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} \xlongequal{m=k-1} \lambda \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \lambda^2 + \lambda,$$

由公式(6-40)，泊松分布的方差等于

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = (\lambda^2 + \lambda) - (\lambda)^2 = \lambda.$$

即：泊松分布的方差和数学期望相等，都等于参数 λ.

因此，如果观察到一个取非负整值的离散型随机变量 ξ，它的方差和数学期望相等，ξ 就有可能服从泊松分布．医学统计学里一个有关泊松分布的假设检验利用了这一性质.

例 6-50 如果 4 个人的工作服挂在一起，上班时他们随意取一件穿上，记 ξ 表示 4 个人中取到了自己衣服的人数，则 ξ 的分布列如下表，试求 ξ 的方差.

ξ	0	1	2	3	4
P	9/24	8/24	6/24	0	1/24

解 $E\xi = (8 + 12 + 4)/24 = 1$，$E\xi^2 = (8 + 24 + 16)/24 = 2$，$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 2 - 1 = 1$.

这是一大类有共性的问题的简单提法．常见的一些例子如下：

(1) 夜间紧急集合时，n 个士兵摸黑从枪架上取一支枪，记 ξ = “取到自己的枪支的士兵人数”；

(2) n 对夫妇参加游戏，被随机地分成 n 组，每组一男一女．记 ξ = “n 组中是夫妇的组数”；

(3) n 对染色体在水溶液中加温至 104℃时，双链离解为单链．当溶液降温至 90℃时，这些单链随机地两两重新聚合为双链．记 $\xi = n$ 对重聚染色体中，原本就是一对的个数.

这一类问题都归于配对问题．对于配对问题，这些 ξ 服从什么分布？上面三个随机变量都有：$E\xi = D\xi = 1$，$n = 2、3、4、\cdots$．因此可以想见，当 n 充分大以后，这些 ξ 都近似服从泊松分布．实际上，当 n 充分大以后，都有 $\xi \sim \pi(1)$.

可以证明，方差有如下性质：

(1) $D(c) = 0$，c 为常数；

(2) $D(\xi + b) = D\xi$，b 为常数；

(3) $D(a\xi) = a^2 D\xi$，a 为常数；

(4) 设 ξ_1、ξ_2、…、ξ_n 相互独立，则 $D(\xi_1 \pm \xi_2 \pm \cdots \pm \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k$.

例 6-51 设随机变量 ξ 的期望 $E\xi=\mu$ 与方差 $D\xi=\sigma^2$ 均存在且 σ^2 不为零，在 n 次独立重复试验中所得诸 ξ_i 都与 ξ 同分布，以 $\overline{\eta}$ 表示它们的平均，试计算 $\overline{\eta}$ 的期望与方差.

解 由于诸 ξ_i 与 ξ 同分布，故有 $E\xi_i=\mu$，$D\xi_i=\sigma^2$. 取 $\overline{\eta}=(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)/n$，由期望与方差的性质有：

$$E\overline{\eta} = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i = \frac{1}{n}n\mu = \mu = E\xi,$$

$$D\overline{\eta} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{D\xi}{n}.$$

说明独立重复试验的平均值 $\overline{\eta}$ 与 ξ 有相同期望，但 $\overline{\eta}$ 的方差只及 ξ 的 $1/n$，故平均值 $\overline{\eta}$ 比总体 ξ 的分布更集中.

例 6-52 求两点分布和二项分布的方差.

解 设 ξ 服从两点分布：$P(\xi=1)=p$，$P(\xi=0)=q$，$(p+q=1)$，则

$$E\xi^2 = 1^2\times p + 0^2\times q = p,\quad D\xi = E\xi^2-(E\xi)^2 = p-p^2 = p(1-p) = pq.$$

二项分布是 n 个独立的两点分布之和，由方差性质(4)，若 $\xi\sim B(n,p)$ 则 $D\xi=npq$.

例 6-53 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，求 $D\xi$.

解 例 6-48 中已求出 $E\xi=\mu$，因此

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

令 $u=(x-\mu)/\sigma$，且由分部积分公式和正态密度函数性质得到

$$D\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2e^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}(0+\sqrt{2\pi}) = \sigma^2.$$

由此知正态分布中的参数 σ^2 就是服从该分布的随机变量的方差，而 σ 是其标准差.

事实上，随机变量的数字特征通常都是和它分布中的参数相联系的. 下面用表格的形式列出前面讨论过的 6 种常见分布的数学期望和方差(表 6-10)，以供参考.

表 6-10 常见分布的数学期望和方差表

名称	离散型			连续型		
	两点分布	二项分布	泊松分布	均匀分布	指数分布	正态分布
参数	p	n，p	λ	a，b	λ	μ，σ
数学期望	p	np	λ	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{\lambda}$	μ
方差	$p(1-p)$	$np(1-p)$	λ	$\frac{1}{12}(b-a)^2$	$\frac{1}{\lambda^2}$	σ^2

*三、大数定理和中心极限定理

随机事件在某次试验中是否出现是有偶然性的，但在大量独立重复试验中却呈现出明显的规律性. 下面的一组定理阐明了随机现象的内在规律.

(一) 大数定律

1. 伯努利大数定律

独立重复试验中，每次试验都可定义一个服从两点分布的随机变量 ξ_i 合于 $P(\xi_i=1)=P(A)=p$ 和 $P(\xi_i=0)=P(\overline{A})=1-p=q$. 若取 $\eta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，$\eta_n$ 就是前 n 次试验中 A 出现的次

数，而$f_n(A)=\eta_n/n$就是这n次试验中A的频率．伯努利证明了：

定理 6-7（**Bernoulli law of large numbers**） 设$f_n(A)=\eta_n/n$是独立重复试验中事件A的频率，p是每次试验中A的概率，则对任意小的正数ε总有

$$\lim_{n\to\infty}P[\,|f_n(A)-p|<\varepsilon\,]=1. \tag{6-41}$$

定理的意义就是当试验次数n充分大以后，频率必然要接近于概率，这是概率的统计定义的依据．正是由于这个发现，独立重复试验的模型称为伯努利概型．

2．大数定律

如果独立重复试验中所考察的随机变量ξ_i不一定服从两点分布（例如连续型随机变量），那么$\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$就表示随机变量$\xi$在前$n$次试验中的总和，相应地$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$就表示随机变量$\xi$在前$n$次试验中的（算术）平均值，类似于定理6-7有：

定理 6-8 设ξ_1、ξ_2、…是独立同分布的随机变量，且对每个i都有，$E\xi=\mu$，$D\xi_i=\sigma^2$，则对任意小的正数ε，总有

$$\lim_{n\to\infty}P\left[\,\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\mu\right|<\varepsilon\right]=1. \tag{6-42}$$

由此知，当试验次数n充分大以后，算术平均$\bar{\xi}_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$就必然要无限地接近于随机变量$\xi$的数学期望$E\xi=\mu$．前边的伯努利大数定律是这个定理的特例，因为当$\xi$是两点分布时，$p$就是$\xi$的数学期望，而$\bar{\xi}_n$（算术平均）就是频率．

（二）中心极限定理

定理 6-9 设ξ_1、ξ_2、…是独立同分布的随机变量，且对每个i都有，$E\xi_i=\mu$，$D\xi_i=\sigma^2$，则对任意实数x都有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t. \tag{6-43}$$

在定理6-9的条件下，不管一系列的随机变量服从什么分布，当n很大时，它们的和就近似于正态分布．因此，如果一个量（例如身高）是由很多因素决定的（每个因素对这个量的贡献都是一个随机变量），这个量作为诸多随机变量之和就可以认为是服从或近似服从正态分布的．这是一个在生命科学领域里普遍应用的重要原理．

定理 6-10 设随机变量$\xi\sim B(n,p)$其中$0<p<1$，则对任意x恒有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\xi-np}{\sqrt{npq}}\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\Phi(x). \tag{6-44}$$

有了这个定理，当n较大时，有关二项分布的概率计算就转化为标准正态分布的分布函数的查表取值．当二项分布的随机变量ξ取整值k，即$\xi=k$时，应理解为一个相应的标准正态分布的随机变量在一个以k为中心长度为1的区间$(k-1/2,k+1/2)$中取值，即是

$$\begin{aligned}P(\xi=k)&=P(k-0.5<\xi<k+0.5)\\&=P\left\{\frac{k-0.5-np}{\sqrt{npq}}<\frac{\xi-np}{\sqrt{npq}}<\frac{k+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right\}\\&\approx\Phi\left[\frac{k+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right]-\Phi\left[\frac{k-0.5-np}{\sqrt{npq}}\right].\end{aligned} \tag{6-45}$$

类似地，

$$P(\xi\leqslant k)=P(\xi<k+0.5)=P\left\{\frac{\xi-np}{\sqrt{npq}}<\frac{k+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right\}\approx\Phi\left[\frac{k+0.5-np}{\sqrt{npq}}\right]. \tag{6-46}$$

例 6-54 某种疾病的患病率为$p=0.005$，现对10000人进行普查，试求检查出的患者

数在 45 人至 55 人之间的概率.

解 设患病人数为 ξ，则 $\xi \sim B(10000, 0.005)$，且 $np=50$，$npq=49.75$，由中心极限定理有

$$P(45\leqslant\xi\leqslant55)=P(\xi\leqslant55)-P(\xi\leqslant45-1)\approx\Phi\left[\frac{55+0.5-50}{\sqrt{49.75}}\right]-\Phi\left[\frac{44+0.5-50}{\sqrt{49.75}}\right]$$

$$=\Phi(0.78)-\Phi(-0.78)=2\Phi(0.78)-1=2\times0.7823-1=0.5646.$$

当 n 充分大时，二项分布也近似于一个泊松分布，因而泊松分布也就同样能够用正态分布来近似，注意到泊松分布的方差也等于 λ，即有

$$P(\xi=k)\approx\Phi\left[\frac{k+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right]-\Phi\left[\frac{k-0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right], \tag{6-47}$$

$$P(\xi\leqslant k)\approx\Phi\left[\frac{k+\frac{1}{2}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right]. \tag{6-48}$$

在本例中取 $\lambda=np=50$，就有

$$P(45\leqslant\xi\leqslant55)=P(\xi\leqslant55)-P(\xi\leqslant44)=\Phi\left[\frac{55+\frac{1}{2}-50}{\sqrt{50}}\right]-\Phi\left[\frac{44+\frac{1}{2}-50}{\sqrt{50}}\right]=0.5646$$

例 6-55 旅客买一份旅行保险交保险费 20 元，如果在旅行中遇事故而身亡，保险公司向家属赔付 20 万元. 设这一类伤亡事故的发生率为 $p=0.000081$，假定这一年卖出了 100 万份保险，若不计保险公司的运营成本，求

（1） 保险公司亏本的概率；

（2） 保险公司赚到 500 万元的概率.

解 由题设条件，保险公司收入了 2000 万元. 假若发生赔付 ξ 人，则当 $\xi>100$ 时，保险公司会亏本. 当 $\xi<75$ 时保险公司获 500 万元纯收入. 这里 ξ 服从二项分布，取 $\lambda=np=81$，把 ξ 当作泊松分布用正态近似来处理.

（1） 所求概率为

$$P(\xi>100)=1-P(\xi\leqslant100)=1-\Phi\left[\frac{100+\frac{1}{2}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right]$$

$$=1-\Phi\left(\frac{100+0.5-81}{\sqrt{81}}\right)=1-\Phi(2.167)=0.0197;$$

（2） $P(\xi\leqslant75)=\Phi\left(\frac{75+0.5-81}{9}\right)=\Phi(-0.611)=1-\Phi(0.611)=1-0.7291=0.2709.$

【思考与练习】

1. 随机变量 ξ 服从柯西分布(Cauchy distribution)，其概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

考察 ξ 是否有数学期望和方差?

2. 设 ξ 的数学期望和方差都存在，且 $D\xi\neq0$. 令 $\eta=\frac{\xi-E\xi}{\sqrt{D\xi}}$，证明：$E\eta=0$，$D\eta=1$.

3. 测量儿童身高时，舍去多出整厘米的部分而记为 X_1、X_2、…、X_n，舍去部分为 ξ，则原始数据为 $x_i+\xi$. 若 X_1、X_2、…、X_n 的平均值为 $\bar{x}$，原始数据的均值可以认为是 $\bar{x}+E\xi=\bar{x}+0.5$. 得出这样的结论涉及哪些随机变量和概率论理论?

4. 独立重复试验满足大数定理和中心极限定理的条件吗?



习 题 六

1. 医院的信息管理系统把入院枪伤病人按伤势(轻、中、重)和是否有意外保险(有、无)分类编码. 观察一位新入院病人，应该归于何类：(1)写出该试验的基本事件组；(2)设 A = 病人是重伤，B = 病人没有保险. 写出 A、B 所包括的基本事件；(3)事件 $A+\overline{B}$ 包含哪些基本事件?

2. 化简下列事件

(1) $(A+B)(A+\overline{B})$； (2) $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})$； (3) $(A+B)(B+C)$.

3. 电话号码由 8 个数字组成，每个数字可以是 0、1、…、9 中的任一个，求下列事件的概率

(1) 首位不为 0 的号码； (2) 没有重复数字的号码；

(3) 全由奇数组成的号码； (4) 号码数字严格增加的号码.

4. 为了减少比赛场次，设想把 20 个球队分成两组(每组 10 队)进行比赛，求最强的两队分在不同组内的概率.

5. 在一副扑克牌(52 张)中任取 4 张，求这 4 张牌花色全不相同的概率.

6. 一个盒子里装有 5 个白球、4 个红球和 3 个黑球，另一个盒里装有 5 个白球、6 个红球和 7 个黑球，从每个盒子中各取出一个，它们颜色相同的概率是多少?

7. 期末复习时，数学课的张教授布置了 10 道综合练习题供学生考前热身，并且告诉大家，期末考试将随机地包含其中 5 道题. 临考时，一个学生已经会做其中的 7 道题. 求下列概率：(1) 她做对了 5 道题；(2) 她至少做对了 4 道题.

8. 有一种游戏用的转盘，盘面三等分，每一等分分别标一个号码. 随机转动转盘，得到每个号码的机会是相等的. Tom 和 Jerry 用三个转盘来玩游戏，转盘 a 上面是号码 1、5、9，转盘 b 上面是号码 3、4、8，而转盘 c 上面是号码 2、6、7. 游戏规则是，Tom 和 Jerry 各选一个转盘并转动它，谁得到的号码大，谁就赢. 两人同意，Tom 先选一个转盘，然后，在剩下的两个中，Jerry 可以选一个. Tom 和 Jerry，谁的胜率更大?

9. 一份杂志在其订阅者中调查了 1000 人，以了解社会对于 AIDS 病人的态度. 被问询者按其职业、婚否、受教育程度统计，初步获得数据：312 人有工作，470 人已婚，525 人大学毕业；大学毕业且有工作者 42 人，大学毕业且已婚者 147 人，已婚且有工作者 86 人；大学毕业且有工作且已婚者 25 人. 验证以上数据是否有误.

10. 设 $A \subset B$，化简下列概率式

(1) $P(A|B)$； (2) $P(A|\overline{B})$； (3) $P(B|A)$； (4) $P(B|\overline{A})$.

11. 证明：(1) $P(A|B)=1 \Rightarrow P(\overline{B}|\overline{A})=1$；(2) $P(A|A+B) \geqslant P(A|B)$.

12. 下面的陈述中，哪些是正确的，哪些是不正确的? 试证明或举反例说明之：

(1) 若 $P(A)>0$，则 $P(AB|A) \geqslant P(AB|A+B)$；

(2) 若 $P(A|C)>P(B|C)$ 且 $P(A|\overline{C})>P(B|\overline{C})$，则 $P(A)>P(B)$；

(3) 若 $P(A|C)>P(A|\overline{C})$ 且 $P(B|C)>P(B|\overline{C})$，则 $P(AB|C)>P(AB|\overline{C})$.

13. 下面的陈述中，哪些是正确的，哪些是不正确的? 试证明或举反例说明之：

(1) A、B 相互独立 $\Leftrightarrow P(B|A)=P(B|\overline{A})$；

(2) A、B 相互独立 $\Leftrightarrow \overline{A}$、$\overline{B}$ 相互独立.

14. 一护士负责控制三台理疗机，假定在 1 小时内这 3 台理疗机不需要护士照管的概率分别为 0.9、0.8 和 0.7，求在 1 小时内最多有 1 台需要护士照管的概率.

15. 某医疗仪器上有 A、B 两个易耗元件. 每次使用后，需要更换 A 元件的概率为

$p_A=0.3$，需要更换 B 元件的概率为 $p_B=0.5$，试求：

（1）第 1 次使用后就要更换元件的概率；

（2）若第 1 次使用后就要更换元件，A、B 两个都得更换的概率；

（3）第 3 次使用后才需要更换元件的概率.

16. 某高校对于男性新生体验，除要求达到一般健康标准外，还要求没有色盲或色弱，没有近视，身高在 1.68 米以上，设某省参加高考的学生中色盲或色弱占 3%，近视占 21%，身高在 1.68 米以上占 18%，问考生符合该校体检标准的概率是多少？

17. 某医院用 CT 机和超声仪对肝癌作检测，若单独使用这两种设备，知 CT 机的检出率为 0.8，超声仪的检出率为 0.7，现同时使用 CT 机和超声仪，问肝癌被检出的概率为多少？

18. 某地区的成年人中，曾经有 3%的人有过自杀企图. 该地区的成年人中 20%的人生活在贫困线之下. 假定，贫困人口有自杀企图的比例是非贫困人口的 3 倍. 有自杀企图的人中，多大比例是贫困人口？

19. Jerry 参加一门限时 60 分钟的考试. 假若他在 x 小时内完成考试的概率是 $x/2$，$(0\leqslant x\leqslant 1)$. 已知到 45 分钟时，他尚未完成全部试题，他将用完全部时间的可能性有多大？

20. 某种动物由出生活到 20 岁的概率为 0.8，活到 25 岁的概率为 0.4，问现年 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率为多少？

21. 在 1，2，3 号盒中都各有 10 个球，1 号是 2 黑 8 白，2 号是 6 黑 4 白，3 号是 7 黑 3 白. 另有一盒，里面有 10 张卡片，5 红 3 黄 2 蓝. 先任取一张卡片，视颜色在某盒中取出一球，红色取 1 号盒，黄色取 2 号盒，蓝色取 3 号盒：

（1）已知取出了黑球，最有可能是抽出了哪种颜色的卡片？

（2）若取出了白球，最有可能是抽出了哪种颜色的卡片？

22. 游艺活动中，一项比赛很受欢迎. 参加者向一个小盒子扔 3 个白乒乓球，有几个没投进去，工作人员就往一个空袋子里放几个白乒乓球，同时还放进一个黄乒乓球，然后请刚才的参加者从中任意摸出一个，如果摸出黄乒乓球就可以去领一份奖品. 显然，若三个白乒乓球都投中了，则袋中只有一个黄球，那肯定获奖. 即使一个不中，也还有 1/4 的获奖机会. 假若你每个球投中的概率都是 0.2，你获奖的可能性有多大？

23. X 光室还有 10 盒同种类的 X 光感光片，其中 5 盒为甲厂生产，3 盒为乙厂生产，2 盒为丙厂生产，因存放了一段时间，故甲、乙、丙三厂的产品失效率依次为 1/10、1/15、1/20，从这 10 盒中任取一盒，再从取得的这盒中任取一张 X 光片，求取得有效品的概率.

24. 某医院采用 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四种方法医治某种癌症，在该癌症患者中采用这四种方案的百分比分别为 0.1、0.2、0.25、0.45，其有效率分别为 0.85、0.80、0.70、0.6. 问：

（1）到该院接受治疗的患者，治疗有效的概率为多少？

（2）如果一患者经治疗而收效，最有可能接受了哪种方案的治疗？

25. 一束中子流照射两层的目标，中子被第一层吸收的概率是 0.08，在穿过第一层后被第二层吸收的概率是 0.15，问中子穿过了两层的概率有多大？

26. 某种眼病可致盲，若第一次患病，致盲率为 0.2；第一次未致盲第二次患病致盲的概率为 0.5；前两次未致盲第三次再患病，致盲率为 0.8，试求：

（1）某人两次患病致盲的概率；（2）三次患病致盲的概率.

27. 设某地区消化性溃疡患病率是 0.03，用钡餐透视进行检验，溃疡患者被诊断为有溃疡的占 82%，不是溃疡患者而被诊断为有溃疡的占 2%，某人经钡餐透视后被判断为有



溃疡，求他确实是溃疡病人的概率是多少?

28. Tom 和 Jerry 都是医学院学生. Jerry 有一盆月季花，因病快要枯萎了. Jerry 委托 Tom 假期里给花浇水. 若 Tom 记得浇水，这盆月季花仍有 0.15 的可能要枯萎；若 Tom 不记得浇水，这盆月季花有 0.8 的可能要枯萎. Jerry 有 90%的把握相信 Tom 会记得浇水，试求下列概率：(1)Jerry 返校时月季花还活着；(2)若 Jerry 返校时月季花死了，是因为 Tom 忘记了浇水的概率有多大?

29. Ms Aquina 的乳腺瘤被怀疑是恶性的，所以刚做了一项病理学检查，过几天就会出结果. 由于担心自己的情绪会影响周末的家庭聚会气氛，她要求她的医生 Tom 按如下方式通知她检验结果：Tom 自己扔一次硬币，如果正面向上，有好消息就打电话，否则不打电话；如果反面向上，则无论消息好坏，都不打电话. 这样一来，即使 Tom 没有给她打电话，也不一定是只有坏消息. 设 $\alpha = P$(Ms Aquina 的乳腺瘤是恶性的)，$\beta = P$(Ms Aquina 的乳腺瘤是恶性的 | Tom 没有给她打电话).

(1) 比较 α 和 β 的大小；(2) 用 α 表示 β，并证明(1)的结论.

30. 设母鼠一胎生 4、5、6、7 只小鼠的概率分别为 1/4、1/3、1/4、1/6，每只小鼠能安然活过哺乳期的概率为 3/4，求有 5 只小鼠渡过哺乳期的概率.

31. 在某些发展中国家里，由于传统和经济方面的因素，大多数家庭都想要男孩. 卫生和医疗条件的不足，使 20%的新生儿在成年前夭折. 假设出生率无性别差异，生了 5 个孩子而至少得一名成年男子的概率有多大?

32. 某类灯泡使用寿命在 1000 小时以上的概率为 0.2，求 3 个灯泡在使用 1000 小时以后最多只有一个仍未损坏的概率.

33. 如果下面表中列出的是某个随机变量的分布列，未知常数 k 等于多少?

(1)

ξ	-1	0	1
P	$0.5-k$	k	$0.2+k$

(2)

ξ	1	2	3	4
P	$4k$	$3k$	$2k$	k

34. 设某种药物对痔疮的治愈率为 80%，现独立地对 4 名痔疮病人用药，求治愈病人数 ξ 的分布列，并指出能治愈几人的概率最大?

35. 周末，Tom 和 Jerry 打乒乓球. 每球 Tom 得分的概率皆为 $p = 0.6$. 求下列概率：(1)在前 5 球中，Tom 仅得 2 分；(2)到第 4 球 Tom 才得第 1 分；(3)在前 5 球中，没有出现平分；(4)Tom 以 5:4 胜第 1 局(设 9 打 5 胜).

36. 某种溶液中含微生物的浓度为 0.3 只/毫升，现从 500 毫升溶液中随机地抽出 1 毫升，问其中含有 2 只微生物的概率是多少?

37. 为了研究一种专灭某一种昆虫的杀虫剂的效能，在较大面积上喷洒了杀虫剂后，把这一片面积分成若干等面积的小块，然后从中随意选出若干块并计数里面还活着的这种虫子. 据过去的经验，每块平均可以发现 0.5 个活虫子. 如果活虫子的数量服从泊松分布，求随意一块上发现至少一个虫子的概率有多大?

38. 据统计，全球每月的民航空难数约为 3.5 次. 求下列概率：

(1) 一个月中，至少有两次坠机事故；

(2) 一个月中，至多有一次坠机事故；

(3) 一个月中有坠机事故时，至少有两次坠机事故.

39. 某实验常用较大型动物，第一次做实验成功率为 0.4；第一次失败的可用第二只再做，其成功率为 0.6；若失败可用第三只再做，成功率为 0.8；第三次失败的还可以用第四只再做。这次无论成功与否，均应结束实验.

(1) 求一个实验结束所用动物数的分布列；

(2) 若有 5 人进行实验，平均需要多少只动物?

40. 设随机变量 ξ 的概率分布为

$$P(\xi=x)=\frac{A}{3^x},\ x=1、2、3、4.$$

确定 A 的值，并写出 ξ 的分布函数.

41. 设连续型随机变量 ξ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}Ax & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}.$$

(1) 确定 A 的值；(2) 求 ξ 的分布函数；(3) 求 ξ 落在区间 $(0.3,0.7)$ 内的概率.

42. 随机变量 ξ 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}x & 0<x\leqslant 1\\ 2-x & 1<x\leqslant 2.\\ 0 & 其他\end{cases}$$

求：(1) ξ 的分布函数 $F(x)$；(2) $P(\xi<0.5)$，$P(\xi>1.3)$，$P(0.2<\xi<1.2)$.

43. 设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x$，求常数 A、B 及 ξ 的概率密度函数.

44. A、B 两个警察分局皆有警车在各自的责任区内巡逻. 某街口正好在两个责任区的结合部，因此，每隔 10 分钟有一辆 A 局的警车通过，每隔 15 分钟有一辆 B 局的警车通过，两车通过此处的时间相互独立. 一个小姑娘拾得巨款，她不露神色地来到街口等待警车通过，哪个车先到就乘坐哪一辆车去警察分局上交拾款. (1)求小姑娘候车时间不超过 3 分钟的概率；(2)如果小姑娘候车时间不超过 3 分钟，她去 B 局的概率.

45. 军演时，参演部队沿 A、B 之间长 100 公里的山区公路展开. 指挥部决定沿线设 3 个急救站，A、B 点及其中间点各设一个，任有人员发生伤病，皆送往最近的急救站. 假定，在这 100 公里的区间内任何一点出现伤病员的可能性是相等的. 一位参谋建议，把急救站设在距 A 点 25、50 和 75 公里处. 指挥部采纳了他的建议，为什么?

46. 假设人们打一个电话，通话时间服从参数为 $\lambda=1/10$ 的指数分布. 当 Jerry 来到电话亭时，Tom 抢先挤了进去. 求下列概率：

(1) Jerry 至少等待了 10 分钟；

(2) Jerry 至少等待了 20 分钟；

(3) Jerry 等待了 10 分钟，他还得再等 10 分钟以上.

47. 设 $\xi\sim N(3,2^2)$，试求：

(1) $P(2<\xi\leqslant 5)$；　(2) $P(-3\leqslant\xi\leqslant 8)$；　(3) $P(\xi>3)$；　(4) $P(-2\leqslant\xi\leqslant 8)$.

48. 从服用放射性标记药物的动物尿样中测到的放射量服从 $N(284,20^2)$ 的正态分布(按单位/分钟计算)，求：

(1) 放射量大于 300 单位/分钟的概率；(2) 放射量在[250,300]单位/分钟的概率.

49. 指纹鉴别中的一个重要指标是 10 个手指中共有多少个脊纹，假定其数量近似服从 $N(140,50^2)$，试求下列概率：(1)一个人的脊纹数等于或大于 200 个；(2)少于或等于 100 个；(3)在 100 个到 200 个之间；(4)如果某一人群共有 10000 人，预期其中有多少人至少有 200 个脊纹?

50. 有些遗传性疾病的初发年龄近似服从正态分布，假定对杜兴氏肌萎缩综合征来说，这个年龄服从 $N(9.5,9)$，那么一个男孩因此病第一次被送到医院来时，他的年龄在：(1)8.5 至 11.5 岁间的概率；(2)大于 10 岁的概率；(3)小于 12.5 岁的概率.

51. 某大学新生中有 5000 名男同学，其身高(cm)服从分布 $N(168,5^2)$. 若要求战斗



机飞行员的身高在 168～175cm 之间，大约多少名男同学，其身高合乎其要求？如果男同学中仅 0.5%的视力达到飞行员的标准，综合考虑身高和视力，又有多少名男同学合乎其要求？

52. 某省若干年里高考总分的分布服从 $N(440,10^2)$，预计当年录取率为 10%，那么录取线会划到多少分以上？

53. 拔河比赛，双方各出 3 男 2 女，成单列对阵，从中心往两边的位置依次记为 1，2，3，4，5 号，以 ξ 表两边相同位置上两选手同性别的对数，则 ξ 的分布列为：

ξ	1	3	5
P	0.3	0.6	0.1

求 ξ 的数学期望、方差和标准差.

54. 设随机变量 ξ 有：$P(\xi=a)=0.5$，$P(\xi=1)=b$，$P(\xi=6)=0.2$，且 $E\xi=1$. 求 a、b 和 $D\xi$.

55. 随机变量 ξ 分别以概率 0.4、a、b 和 c 取值 1、2、3、4，并且 $E\xi=2$，$D\xi=1$. 求 a、b、c.

56. 设随机变量 ξ 具有密度函数：

$$f(x)=\begin{cases}A\cos^2 x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2};\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

试求：（1）A 的值；（2）$E\xi$，$D\xi$.

57. 设在 1 小时内 1 名男子分泌的胆固醇量 T 在$[0,M]$之间，其密度函数为：

$$f(t)=\frac{t}{1+t^2}\quad(0\leqslant t\leqslant M).$$

（1）M 的含义是什么？等于多少？（2）1 小时内分泌的胆固醇量 T 少于 $M/2$ 的概率有多大？（3）T 在$[0,2]$之内的概率有多大？（4）试求出 $e(T)$ 和 $D(T)$；（5）任选三男子，求至少一人 $T>2$ 的概率；（6）求 $t_{1/2}$，使 $t_{1/2}$满足 $P(T<t_{1/2})=P(T>t_{1/2})=0.5$.

58. 某医院每周一次从血液中心补充其血液储备. 假若每周消耗 ξ 单位，ξ 的密度函数是$f(x)=5(1-x)^4$，$0<x<1$. 医院的储备规模应该有多大，才能保证一周内血液被用完的可能性小于 0.01？

59. 用 B 超测量胎儿顶径时，会有一定误差，假设误差服从 $N(0,1.25^2)$. 为确定分娩方案，医生要求测量误差不超过一个单位. 问测量三次至少一次达到要求的概率有多大？

60. 美国某个州的居民月自杀率为 $p=1/100000$（每 100000 人中有一人）. 这个州的州府有人口约 40 万人. 求下列概率：

（1）一个月中有至少 8 人自杀；

（2）一年里至少有两个月，每月自杀人数大于等于 8 人.

61. 10 只野鸭从 10 名猎人头上飞过，这 10 名猎人独立地瞄准任意一只鸭子，并且一起开火. 他们击中目标的概率都是 0.6. 求：（1）平均有几只野鸭成为目标？（2）10 只野鸭都被击中的概率；（3）平均有几只野鸭被击中？

62. 预警系统发现有 10 枚弹道导弹来袭，立刻发射了 50 枚反弹道导弹. 假设每枚反弹道导弹都独立地等可能地盯住这 10 枚弹道导弹中的某一枚，并且以 0.1 的概率命中所瞄准的目标.

（1）对于弹道导弹 k，求瞄准它的反弹道导弹数的分布，$k=1、2、\cdots、10$；[提示：考虑泊松近似]

（2）求平均有几枚弹道导弹被盯住；

（3）求平均有几枚弹道导弹被击中.

63. Tom 初次下井去了解矿工们的健康条件时，就赶上了事故. 事发时他正独处矿道的 Y 型结合部. 不熟悉环境的他，黑暗中只好摸索着随机地从一条矿道走开. 如果他选中矿道 A，3 个小时后能平安达到地面；若选中矿道 B，5 个小时后他将回到原处；要是他从矿道 C 离开，则会在 7 个小时后转回原处. 问：（1）平均要多少小时，他能平安达到地面？（2）假定他不停地在黑暗中走着. 如果他最多只能坚持 24.5 小时，他最终自己走出地面的概率.

*第七章　线性代数初步

线性代数是从解线性方程组和讨论二次方程的图形等问题而发展起来的一门数学学科．线性代数主要是研究矩阵和向量间的线性关系的一个数学分支．它在工业、农业、科学技术领域中有着重要的应用，特别是计算机技术的发展和普及，更加促进了线性代数的广泛应用和发展．线性代数对以后学习生物医学统计、多变量分析、模糊数学、生物数学是不可缺少的基础知识．

本章主要介绍矩阵理论、线性方程组和 n 阶行列式的计算，以及矩阵的特征值和特征向量．它们既是线性代数的主要基础知识，又是一种计算工具．

第一节　行　列　式

本节介绍行列式的定义和计算方法及克莱姆法则，为解一般的线性方程组及其他应用作准备．

一、行列式的概念和计算

行列式是解线性方程组的有力工具，可由求解二元和三元线性方程组着手，引进二阶和三阶行列式，然后推广到 n 阶行列式．

回忆初等代数里解二元或三元线性方程组的加减消元法．例如求解二元方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{7-1}$$

设 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，可用消去法解得：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}};\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了用另一种方法求解二元线性方程组，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};\quad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2;\quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \tag{7-2}$$

它们都称为二阶行列式，它们含有两行、两列，横写的叫行，竖写的叫列．从上式可知，二阶行列式是两项的代数和，一项是从左上角到右下角的对角线上两个元素的乘积，取正号；另一项是从右上角到左下角的对角线上两个元素的乘积，取负号．如果将式(7-2)中的三个二阶行列式分别记为 D、D_1、D_2，并且当 D 不为零时，二元线性方程组(7-1)式可用二阶行列式得到与消去法同样的解，即

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\qquad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

二阶行列式 D 进一步表示成：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{k(12)}a_{11}a_{22} + (-1)^{k(21)}a_{12}a_{21} = \sum_{(j_1j_2)}(-1)^{k(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}.$$

即二阶行列式是一个数，其值由 2! 项代数和构成，每一项都取自不同行不同列的两个元素之积，再乘以 $(-1)^{k(j_1j_2)}$，其中 $k(j_1j_2)$ 称为逆序数(即各项因子的第一个下标按自然顺序排列后，第二个下标出现多少次“下标数小的反而在下标数大的后面”)．这里 $a_{11}a_{22}$ 的逆序数 $k(12)=0$，$a_{12}a_{21}$ 的逆序数 $k(21)=1$，$\sum$ 表示对 j_1、j_2 两个数所有排列求和，决定共有

2! 个项求和.

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{7-3}$$

解一般的三个方程的三元线性方程组可以引出下面的三阶行列式. 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

在三阶行列式 D 中，可按十字交叉法得到不同行不同列的 3 个元素的乘积，共有 6 项，实线上的三个元素的乘积构成的三项都取正号. 虚线上的三个元素的乘积构成的三项都取负号，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

每一项的三个元素乘积的逆序数 $k(j_1j_2j_3)$ 分别是 0、2、2、1、1、3，用 $\sum$ 表示对 j_1、j_2、j_3 三个数的所有排列求和，决定共有 3! 个项求和. 所以三阶行列式 D 可表示成：

$$D = \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{k(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

定义 7-1　n 阶行列式（n-order determinant）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{k(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

是由 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,3,\cdots,n; j=1,2,3,\cdots,n)$ 通过上式所确定的一个数，其中，"$\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$" 表示对 j_1、j_2、$\cdots$、j_n 所有 n 元排列求和，共有 $n!$ 个项求和，和式中每一项都是由取自行列式中所有既不同行又不同列的 n 个元素的乘积再乘以 $(-1)^{k(j_1j_2\cdots j_n)}$，其中 $k(j_1j_2\cdots j_n)$ 为 n 个元素的第一个下标按序数的自然数顺序排列后，其第二个下标排列的逆序数. a_{ij} 称为行列式的元素，n 为行列式的阶.

由行列式定义可知，一阶行列式 $|a_{11}|$ 是一个数 a_{11}，不是 a_{11} 的绝对值；二、三阶行列式可按十字交叉法计算结果. 但四阶以上的行列式按定义计算就很麻烦. 为了使四阶以上行列式计算简单化，可引进余子式和代数余子式的概念.

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，剩下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的**余子式（complement minor）**，记 M_{ij}；而 M_{ij} 前面附以符号 $(-1)^{i+j}$ 后，叫做元素 a_{ij} 的**代数余子式（algebraic complement）**，用符号 A_{ij} 来表示，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如四阶行列式



$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

有了代数余子式的概念，我们给出行列式的另一定义：

对 $n\geqslant 2$，若 $n-1$ 阶行列式已经定义，则规定 n **阶行列式**为由 n^2 个数得到的下列展开式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n},$$

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$. M_{1j}是 a_{1j}的**余子式**，即在 D_n 中划去第一行和第 j 列后得到的$(n-1)$阶行列式，A_{1j}称为 a_{1j}的**代数余子式**. D_n 也可简记为 D 或 $|a_{ij}|_n$.

有了代数余子式的概念，可以把高阶行列式化为一些较低阶的行列式来计算行列式的值.

定理 7-1　n 阶行列式等于它的任一行(列)的各元素与其相对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (\text{按第 } i \text{ 行展开})$$

$$(D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\text{这是按第 } j \text{ 列展开的}).$$

这个定理亦称为行列式按行(列)展开法则. 定理证明略.

在运用定理 7-1 计算行列式时，我们总是按含 0 最多的行或列来展开行列式，因为 0 位置的代数余子式乘以 0 后仍然是 0.

例 7-1　计算

$$D=\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 & 1 \\ -13 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}\text{的值.}$$

解　由定理 7-1 将行列式 D 按第三行展开，因为除 $a_{33}=1$ 外，其余的 a_{31}、a_{32}、a_{34} 均为 0，D 展开后得

$$D=0+0+1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}+0=\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-5)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+(-5)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -13 & -1 \end{vmatrix}+0$$

$$=(-5)\cdot(1)\cdot(-2)+(-5)\cdot(-1)\cdot(6)=10+30=40.$$

例 7-2　证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证 由定理 7-1 将行列式按第一行展开，下一个 $n-1$ 阶行列式再按第一行展开有

$$D=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D=a_{11}\cdot a_{22}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

这样逐步推下去，则得到 $D=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdots a_{nn}$.

例 7-3 计算下列三角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & ⋰ & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ⋰ & 0 \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & ⋰ & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1n}\cdot(-1)^{1+n}\cdot\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ \vdots & ⋰ & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} \\ 0 & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots$$

$$=(-1)^{(n+1)+n+(n-1)+\cdots+2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{(n+2)+n+(n-1)+\cdots+1}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

同理可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ⋰ & 0 \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

二、行列式的性质与计算

行列式性质在行列式计算和线性代数理论及其应用中发挥重要作用.

（一）行列式的性质

如果把 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的行依次变为列，就得到一个新行列式



$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D^{T} 叫做 D 的转置行列式.

性质 7-1 n 阶行列式的值等于它的转置行列式的值.

性质 7-1 说明在行列式中行与列的地位是对等的，因此，行列式凡是对行成立的性质，对列也同样成立.

性质 7-2 互换行列式的两行(列)，则行列式变号.

性质 7-3 若行列式中有两行(列)元素对应相同，则行列式的值为零.

事实上，将行列式 D 中相同两行(列)元素对换，行列式本身并未改变，但其值由性质 7-2 知道 $D=-D$，由此得出 $D=0$.

性质 7-4 行列式某行(列)的所有元素乘上某数 $k(\neq 0)$，等于 k 乘行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 7-5 若行列式的某行(列)的各元素是两项之和，则此行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 7-6 若行列式中有两行(列)元素对应成比例，则行列式等于零.

证 设行列式的第 i 行(列)的各元素为第 j 行(列)对应元素的 k 倍，由性质 7-4 可把 k 提到行列式符号的前面，这时行列式第 i、j 两行(列)已经相同，再由性质 7-3 可知行列式等于零.

性质 7-7 将行列式的某一行(列)乘上一个常数 k 后加到另一行(列)上去，行列式的值不变.

证 不妨设行列式第 j 行 k 倍加到第 i 行上去，由行列式性质 7-5 和性质 7-6，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 7-8 若行列式中有一行(列)元素全是零，则行列式等于零.

(二) 行列式的计算

利用行列式的性质和行列式展开定理可简化行列式的计算. 读者可通过例题掌握运算规律和特点.

例 7-4 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}\text{的值.}$$

解 将行列式第 1 行分别乘(-1)、1 及(-3)，加到第 2、3、4 行上，得到

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & -8 \end{vmatrix}.$$

再把第 1 行乘以(-1)后加到第 2 行，再按第 2 行展开得

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 7\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 49.$$

把 n 阶行列式
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
称为上三角形行列式，形如例 7-2 的行列式称为下三角形行列式，它们统称为三角形行列式. 显然，n 阶三角形行列式等于它主对角线上元素的乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$.

对任意的 n 阶行列式可用行列式性质将其化为三角形行列式，这时 n 阶行列式的值即为主对角线上的元素相乘的积.

例 7-5 计算

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}\text{的值.}$$

解 互换 1、2 两行，第 1 行乘 2、(-3)、(-2)后分别加到第 2、3、4 行.



$$D=-\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\-2&5&-1&3\\3&-1&5&-5\\2&8&-7&-10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\0&-13&25&17\\0&26&-34&-26\\0&26&-33&-24\end{vmatrix}$$

将第 2 行分别乘 2 后加到 3、4 行；以后计算类似. 利用计算上三角形行列式结果有

$$D=-\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\0&-13&25&17\\0&0&16&8\\0&0&17&10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\0&-13&25&17\\0&0&16&8\\0&0&0&\frac{3}{2}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\cdot(-13)\cdot 16\cdot\left(\frac{3}{2}\right)=312.$$

推论 7-1 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j;$$

或
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j.$$

证 不妨设 $i<j$，考虑辅助行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\begin{matrix}\\\\\leftarrow\text{第 } i \text{ 行}\\\\\leftarrow\text{第 } j \text{ 行}\\\\\\\end{matrix}$$

其中第 i 行与第 j 行对应元素相同，故 $D_1=0$. 再把 D_1 按第 j 行展开，由

$$D_1=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}.$$

所以
$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

上述证法如按列进行，同理可证明

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j.$$ 证毕.

例 7-6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}x&a&a\\a&x&a\\a&a&x\end{vmatrix}.$$

解 此行列式的特点为：各列(行)元素之和相等，故把下边各行(右边各列)加到第一行(列)上去.

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3}\begin{vmatrix}x+2a&x+2a&x+2a\\a&x&a\\a&a&x\end{vmatrix}=(x+2a)\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\a&x&a\\a&a&x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-ar_1]{r_2-ar_1}(x+2a)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&x-a&0\\0&0&x-a\end{vmatrix}=(x+2a)(x-a)^2.$$

对于(7-3)式含有 3 个未知数 x_1、x_2、x_3 的 3 个线性方程组，可用三阶行列式来解，若行列式 D 的值不为零，其解为：



$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

同样对于含有 n 个未知数 x_1、x_2、…、x_n 的 n 个线性方程组的解.

对于含有 n 个未知数、n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

如果线性方程组的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D},\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&b_1&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&\cdots&a_{2,j-1}&b_2&a_{2,j+1}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&b_n&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

这就是用克莱姆法则求解线性方程组的方法.

例 7-7 用克莱姆法则求解线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_4=-5,\\ 3x_1+2x_2-x_3-2x_4=6,\\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4=0,\\ 2x_1-x_3=0.\end{cases}$$

解 首先检验系数行列式不为零，即

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\ 3&2&-1&-2\\ 4&3&-1&-1\\ 2&0&-1&0\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-3r_1\\ r_3-4r_1\\ r_4-2r_1}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\ 0&5&-1&-8\\ 0&7&-1&-9\\ 0&2&-1&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&-1&-8\\ 7&-1&-9\\ 2&-1&-4\end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1\leftrightarrow c_2}{=}\begin{vmatrix}-1&5&-8\\ -1&7&-9\\ -1&2&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&-8\\ 1&7&-9\\ 1&2&-4\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}{=}\begin{vmatrix}1&5&-8\\ 0&2&-1\\ 0&-3&4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2&-1\\ -3&4\end{vmatrix}=2\times4-(-1)\times(-3)=5\neq0.$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-5&-1&0&2\\ 6&2&-1&-2\\ 0&3&-1&-1\\ 0&0&-1&0\end{vmatrix}=10,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&-5&0&2\\ 3&6&-1&-2\\ 4&0&-1&-1\\ 2&0&-1&0\end{vmatrix}=-15,$$



$$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&-5&2\\3&2&6&-2\\4&3&0&-1\\2&0&0&0\end{vmatrix}=20,\quad D_4=\begin{vmatrix}1&-1&0&-5\\3&2&-1&6\\4&3&-1&0\\2&0&-1&0\end{vmatrix}=-25.$$

由克莱姆法则求解线性方程组的方法知：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=-3,\ x_3=\frac{D_3}{D}=4,\ x_4=\frac{D_4}{D}=-5.$$

第二节　矩　　阵

一、矩阵的概念

我们经常在研究一些变量与另一些变量之间的相互关系时可利用一种矩形数表. 如，对某中学学生身高体重的测量，得到如下一份统计表：

人数 / 体重 kg / 身高 m	40	50	60	70	80
1.4	20	16	4	2	0
1.5	80	100	80	20	10
1.6	30	120	150	120	30
1.7	15	30	120	150	120
1.8	0	1	2	8	10

反映身高与体重这种关系时也可将上面表格写成一个简化了的 5 行 5 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix}20&16&4&2&0\\80&100&80&20&10\\30&120&150&120&30\\15&30&120&150&120\\0&1&2&8&10\end{bmatrix}.$$

如果只反映 1.5 米与体重的关系，则可表示为 1 行 5 列的数表

$$[80\quad 100\quad 80\quad 20\quad 10].$$

如果只反映 60kg 与身高的关系，可表示 5 行 1 列的数表

$$\begin{bmatrix}4\\80\\150\\120\\2\end{bmatrix}.$$

我们把这种数表称为**矩阵(matrix)**. 从以上实例中抽象出来，为了更便于解决各种理论问题和实际问题，我们定义矩阵.

定义 7-2　由 $m\times n$ 个数排列成 m 行 n 列的数表

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

叫做 $m\times n$ 矩阵，这 $m\times n$ 个数叫做矩阵 A 的元素，a_{ij}叫做矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素. 元素是实数的矩阵叫实矩阵，我们主要讨论实矩阵，矩阵简记 $A=(a_{ij})_{m\times n}$或 $A=(a_{ij})$.

当 $m=n$ 时，A 称为 n 阶方阵. 记为 $A=(a_{ij})_n$.

值得注意的是 n 阶方阵 A 与 n 阶行列式是不同的两个概念，n 阶方阵是一个由 $n\times n$ 个元素组成的矩形数表；而 n 阶行列式则表示按一定法则计算的一个数.

只有一行的矩阵 $A=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$ 称为**行向量**，或**行矩阵**(**row matrix**)；只有一列的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

称为**列向量**或**列矩阵**(**column matrix**).

$m\times n$ 矩阵可以看成是由 m 个行向量组成，也可看作是由 n 个列向量组成.

如果 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

那么称矩阵 A 与矩阵 B **相等**，记作 $A=B$.

在 n 阶方阵中由左上角向右下角所引的对角线称为**主对角线**，$a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 称为方阵$(a_{ij})_{n\times n}$的**对角线元素**. 主对角线以外的元素都是零的方阵称为**对角方阵**，记作 $diag(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 把对角线元素都是 1，其余元素都是 0 的 n 阶方阵称为 n 阶**单位阵**(**unitary matrix**)，记为 I_n. 如：

$$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad I_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

除对角线元素外，其余元素均为零的方阵称为**对角矩阵**(**diagonal matrix**).

形如

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

的方阵分别称为**上三角形矩阵**和**下三角形矩阵**.

元素都是零的矩阵称为**零矩阵**(**zero matrix**)，记为 O.

例 7-8 写出矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$

的对角矩阵、上三角矩阵和下三角矩阵.

解 A 的对角矩阵、上三角矩阵和下三角矩阵分别为

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&3\\0&5&6\\0&0&9\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\4&5&0\\7&8&9\end{bmatrix}.$$



二、矩阵的运算

(一) 矩阵的加法和数乘

定义 7-3 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 之和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

要注意两个矩阵相加与两个行列式相加有不同的规定，矩阵相加是两个矩阵的所有对应元素都得相加，而两个行列式的相加只是一行(或一列)对应元素相加.

定义 7-4 一个实数 $\lambda(\lambda\neq 0)$ 与矩阵 $A_{m\times n}$ 的数乘记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A=A\lambda=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

注意可以把 $(-1)A$ 写成 $-A$. 还应该注意矩阵的数乘与行列式的数乘规定是不同的，不同点在哪里留给读者考虑.

矩阵的加法与数乘满足以下八条性质：

(1) $A+B=B+A$；
(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$；
(3) $k(\lambda A)=k\lambda A$；
(4) $k(A+B)=kA+kB$；
(5) $(k+\lambda)A=kA+\lambda A$；
(6) $O+A=A$；
(7) $A+(-A)=O$；
(8) $1\cdot A=A$.

其中 A、B、C、O 均是 $m\times n$ 矩阵，k、λ 均为非零实数. 以上性质根据矩阵加法与数乘定义可直接得到.

例 7-9 用矩阵数乘运算性质

(1) 计算矩阵 $A=3\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；

(2) 求满足下面方程的矩阵 X

$$3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}+X=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

解 (1) $A=3\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 & 8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$；

(2) 矩阵 X 保持在等式左边，其余矩阵移到等式右边

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 6 & 0 & 3 \\ 12 & -15 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 7 & -7 \\ -7 & 0 & 0 \\ -8 & 20 & -12 \end{bmatrix}.$$

(二) 矩阵的乘法

我们把一个矩阵的某一行与另一个矩阵的某一列对应元素相乘的代数和规定为新矩阵的一个元素，如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

其中新元素 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}$，$i$、$j=1$、2，对这种运算我们给出如下定义：

定义 7-5 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times k$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个 $k\times n$ 矩阵，则规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\cdots+a_{ik}\cdot b_{kj}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

并把此乘积记为 $C_{m\times n}=A_{m\times k}B_{k\times n}$ 或 $C=AB$.

必须注意，只有当第一矩阵（左边矩阵）的列数等于第二矩阵（右边矩阵）的行数时，两个矩阵才能相乘. 乘积矩阵 C 的元素 c_{ij} 等于左矩阵 A 的第 i 行的元素与右矩阵 B 的第 j 列的对应元素乘积之和.

例 7-10 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

求矩阵 AB 和 BA.

解 A 的列数等于 B 的行数，所以 A 与 B 可以相乘.

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\times4+0\times(-1)+3\times2 & 1\times1+0\times1+3\times0 \\ 2\times4+1\times(-1)+0\times2 & 2\times1+1\times1+0\times0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

同理

$$BA=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

由例 7-10 可以知道，$AB\neq BA$，可见矩阵乘法不适合交换律，这与我们实数乘法是不同的. 另外矩阵也不适合消去律. 比如说：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 30 \\ 0 \end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 30 \\ 5 \end{bmatrix};$$

可以得到

$$AB_1=AB_2=\begin{bmatrix} 75 \\ 80 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

但是，不能从 $AB_1=AB_2$ 中消去 A 得到 $B_1=B_2$！因为 $B_1\neq B_2$，即矩阵乘法不适合消去律.

例 7-11 设矩阵方程形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

记为 $AX=B$，其中 A、X、B 分别代表上面的三个矩阵. 试叙述矩阵方程形式代表线性方程组(7-4)：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (7\text{-}4)$$

解 由矩阵乘法

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = B.$$

又由两个矩阵相等的定义便得到(7-4)式的线性方程组.

例 7-12 设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 \\ y_2 = 2x_1 + x_3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 = 4z_1 + z_2 \\ x_2 = -z_1 + z_2. \\ x_3 = 2z_1 \end{cases}$$

将 y_1、y_2 分别用 z_1、z_2 线性表示.

解 仿例 7-11 将两个线性变换分别写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

由矩阵乘法

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

故得

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + 4z_2 \\ y_2 = 10z_1 + 2z_2 \end{cases}.$$

矩阵的乘法满足结合律和分配律:

(1) $(A_{m\times n}B_{n\times s})C_{s\times t} = A_{m\times n}(B_{n\times s}C_{s\times t})$; (2) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$(k 为实数);

(3) $A(B+C) = AB + AC$; (4) $(A+B)C = AC + BC$.

以上结合律和分配律可根据矩阵乘法、加法、数乘定义直接得到，请读者自行验证. 另外，同阶方阵满足矩阵相乘，由此我们规定矩阵的正整数次幂如下:

$$A^1 = A, A^2 = AA, \cdots, A^{k+1} = A^kA.$$

因为矩阵的乘法满足结合律，所以方阵的幂满足如下运算规律:

$$A^kA^l = A^{k+l}, \quad (A^k)^l = A^{kl} \quad (k, l \text{ 为正整数}).$$

对于单位方阵 I，易于验证下列等式成立:

$$I_nA_{n\times m} = A_{n\times m}, \quad A_{n\times m}I_m = A_{n\times m}.$$

当 A 为方阵时，$IA = AI = A$(I 与 A 同阶).

对 $A_{m\times n}$、$O_{p\times m}$ 及 $O_{n\times l}$，有

$$O_{p\times m}A_{m\times n} = O_{p\times n}, \quad A_{m\times n}O_{n\times l} = O_{m\times l}.$$

(三) 矩阵的转置

定义 7-6 把矩阵 A 的行依次换成列而得到的矩阵，叫做 A 的**转置矩阵**，记作 A^T，即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}，则 A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}.$$

转置矩阵满足如下的规律：

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；　　(2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$；

(3) $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$；　　(4) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

其中 k 为实数，运算规律中前三式显然成立，(4)的推证较繁，用例子加以说明.

例 7-13　已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

验证 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

证　因为

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 8 & 10 & 3 \end{bmatrix}，(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 12 & 0 & 8 \\ 10 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

又因

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}，B^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}，$$

$$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 0 & 8 \\ 10 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

故验证了 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

转置矩阵具有下面两个常用的特征：

设 A 为 n 阶方阵，如果 $A=A^{\mathrm{T}}$ 或 $a_{ij}=a_{ji}$，则称 A 为对称矩阵. 例如

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}，则 A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}，$$

即 $A=A^{\mathrm{T}}$，A 是对称矩阵. 对称矩阵的特点是：它的元素以主对角线为对称轴对应相等.

设 A 为 n 阶实数矩阵，如果有 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=I$，则称 A 为正交矩阵. 例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}、\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}、\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}、\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}，$$

由定义可以分别验证它们都是正交矩阵. 从正交矩阵定义还可知道一个重要的性质，正交矩阵 $A_{n\times n}$ 中每一行(或列)的 n 个元素的平方和等于 1；不同行(或列)对应元素的乘积和等于 0. 读者可用上述矩阵验证正交矩阵性质.

(四) 方阵的行列式

因为方阵的行数和列数相等，所以我们可以定义方阵行列式：

定义 7-7　由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式(各元素的位置不变)叫做方阵 A 的行列式，记作 $|A|$，或 $\det A$.

方阵的行列式与我们讲到的 n 阶行列式一样，都是一个确定的数值. 设 A、B 为 n 阶



方阵，λ 为实数，方阵的行列式满足下述规律：

(1) $|A^{T}|=|A|$；(2) $|\lambda A|=\lambda^{n}|A|$；(3) $|AB|=|A||B|$.

一般来说，A、B 分别是 n 阶方阵，有 $AB\neq BA$，但是，由(3)式可知必有

$$|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|，即有 |AB|=|BA| 成立.$$

例 7-14 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 5\\3 & 4\end{bmatrix}$，求 $|AB|$ 的值.

解 $|AB|=|A||B|=\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & -2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 5\\3 & 4\end{vmatrix}=(-8)(-7)=56.$

此题还有另一种解法：$AB=\begin{bmatrix}11 & 17\\-2 & 2\end{bmatrix}$，$|AB|=\begin{vmatrix}11 & 17\\-2 & 2\end{vmatrix}=56.$

三、矩阵的逆

在数学中，对给定的一个数 $a\neq 0$，则 $\frac{1}{a}$ 存在，并且有

$$a\cdot\frac{1}{a}=a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1.$$

仿照上面的数学关系式，在矩阵中引进逆矩阵这个重要的概念.

定义 7-8 设 A 是 n 阶方阵，I 是 n 阶单位方阵，如果有一个 n 阶方阵 B，使 $AB=BA=I$，则说方阵 A 是可逆的，并把方阵 B 称为方阵 A 的**逆矩阵**(**inverse matrix**)，记 $B=A^{-1}$.

应注意到，A^{-1} 是矩阵 A 的逆矩阵记号，决不能把 A^{-1} 当作矩阵 A 的倒数 $\frac{1}{A}$ 去理解. 关于 n 阶方阵在什么条件下才有逆矩阵 A^{-1} 存在，及求逆矩阵 A^{-1} 的方法有如下定义和定理.

定义 7-9 设 A 是 n 阶方阵，若 $|A|\neq 0$，则把方阵 A 称为非奇异矩阵；若 $|A|=0$，则把方阵 A 称为奇异矩阵.

定理 7-2 方阵 A 有逆矩阵存在的充分必要条件是 A 为非奇异矩阵，则

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$$

其中 A^{*} 称为方阵 A 的伴随方阵，它是 $|A|$ 的各元素的代数余子式所构成的方阵

$$A^{*}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$

证 必要性

设 A 可逆，由 $AA^{-1}=I$，有 $|AA^{-1}|=|I|$、则 $|A||A^{-1}|=1$，所以 $|A|\neq 0$，即 A 为非奇异矩阵.

充分性

设 A 为非奇异矩阵，因为由定理 7-1 和推论 7-1，知

$$A\frac{1}{|A|}A^{*}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\times\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}|A| & 0 & \cdots & 0\\0 & |A| & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & \cdots & |A|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=I.$$

同理可证$\frac{1}{|A|}A^*A=I$，所以按逆矩阵定义，即有

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^* \qquad \text{证毕.}$$

例 7-15 判断矩阵

$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$是否有逆，如果有逆，求出它的逆矩阵.

解 因$|A|=2$，由定理 7-2 可知逆矩阵A^{-1}存在. 且$|A|$的各元素代数余子式是

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}=-2,\ A_{13}=1,$$

$$A_{21}=1,\ A_{22}=0,\ A_{23}=-1,\ A_{31}=-1,\ A_{32}=2,\ A_{33}=1.$$

所以$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&0&2\\1&-1&1\end{bmatrix}$.

故 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&0&2\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&0&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

一般来说，含有 n 个未知量的 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

即$AX=B$. 如果$|A|\neq0$，则A^{-1}存在，就可用求逆矩阵的方法求上面的线性方程组的解. 这是因为$AX=B$两边左乘A^{-1}得，$A^{-1}AX=A^{-1}B$，即$X=A^{-1}B$是上面线性方程组的解.

例 7-16 利用逆矩阵解方程组

$$\begin{cases}x_1\qquad\ +x_3=1\\2x_1+x_2\qquad=0\\x_1+x_2+x_3=2\end{cases}$$

解 上面线性方程组可以写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},$$

或$AX=B$. 由例 7-15 可知 A 的逆矩阵，将A^{-1}左乘$AX=B$，$A^{-1}AX=A^{-1}B$，由$A^{-1}A=I$得

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&0&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\\frac{3}{2}\end{bmatrix},$$

即$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=1$，$x_3=\frac{3}{2}$是线性方程组的解.



定理 7-3　若 $AB=I$（或 $BA=I$），则 $B=A^{-1}$.

证　$|A||B|=|I|=1$，故 $|A|\neq 0$，因 A^{-1} 存在，所以 $B=IB=(A^{-1}A)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}I=A^{-1}$.

由定理 7-2，如果方阵 A 是可逆的，那么它的逆矩阵是唯一的.

关于逆矩阵有如下运算性质：

（1）若 A 可逆，则 A^{-1} 亦可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$；

（2）若 A 可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$；

（3）若 A、B 为同阶方阵且均可逆，则 AB 亦可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

证　$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$．即 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$．证毕.

（4）若 A 可逆，则 A^{T} 亦可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

证　$A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{-1}A)^{\mathrm{T}}=I^{T}=I$ 所以 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$．证毕.

性质（1）和（2）留给读者证明.

第三节　矩阵的初等变换和线性方程组

一、矩阵的秩和初等变换

定义 7-10　在 $m\times n$ 矩阵 A 中，任何 k 行 k 列位于这些行列的交点处的元素构成的 k 阶行列式 $\{k\leqslant\min(m,n)\}$，称为矩阵 A 的 k 阶子式.

例如：

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 8 & 2\\ 2 & -12 & -2 & 12\\ 1 & 3 & 1 & 4\end{bmatrix}，则\begin{vmatrix}2 & -3 & 2\\ 2 & -12 & 12\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}、\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & -12\end{vmatrix}、|-3|$$

分别是 A 的三阶、二阶、一阶子式.

$m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k\cdot C_n^k$.

定义 7-11　若在矩阵 A 中有一个 r 阶子式 $D\neq 0$，且所有大于 r 阶的子式都等于零，则称矩阵 A 的秩（rank）为 r，记为 $R(A)=r$.

例 7-17　求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 8 & 2\\ 2 & 12 & -2 & 12\\ 1 & 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

的秩.

解　因为 A 的所有三阶行列式都等于零，即 4 个三阶子式均为零．但是二阶子式

$$\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & 12\end{vmatrix}=30\neq 0.$$

所以，$R(A)=2$.

一般来讲，利用定义计算矩阵 $A_{m\times n}$ 的 k 阶子式需要计算 $C_m^k\cdot C_n^k$ 多个行列式，为了简化计算矩阵秩和解线性方程组，就需要引入矩阵的初等变换的概念.

定义 7-12　下面的三种变换称为矩阵的初等行变换：

（1）对调两行（对调 i、j 两行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$）；

（2）以数 $k\neq 0$ 乘某一行中的所有元素（第 i 行乘 k，记作 kr_i）；

（3）把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应元素上去（第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，

记作 $r_i + kr_j$).

定义中的"行"换成"列". 即"r"换成"c", 可得矩阵的初等列变换的定义. 矩阵的初等行变换和初等列变换, 统称**初等变换**(**elementary transformation**).

如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B, 称矩阵 A 与 B 等价, 记作 $A \sim B$. 对任何矩阵经过初等变换后, 其秩有如下关系.

定理 7-4 若 $A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$. 证明略.

矩阵的等价关系有以下性质:

1) 反身性: $A \sim A$;

2) 对称性: 若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;

3) 传递性: 若 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$.

例 7-18 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

的秩.

解

$$A \xrightarrow[r_3 + (-2)r_1]{r_2 + (-3)r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + (-1)r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

显然, 矩阵 B 的三阶子式全都是零, 而

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

故 $R(A) = R(B) = 2$, 即矩阵 A 的秩为 2.

一般来说, 一个矩阵 $A_{m \times n}$ 经初等行变换变成矩阵 $B_{m \times n}$, 形式为

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & b_{rr} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

这时很容易看出 A 的秩数为 r. 这也是求矩阵秩数常用的方法. 用计算机计算矩阵的秩数, 通常也采用此方法.

二、利用初等变换求逆矩阵

用初等变换求逆矩阵的方法是: 将所求的可逆矩阵 $A(|A| \neq 0)$ 的右侧添置一个与 A 同阶的单位矩阵 I_n, 构成一个 $n \times 2n$ 的矩阵 $[A \vdots I]$, 对此矩阵施以初等行变换(不能同时进行列变换), 将它的左半部化成单位矩阵后, 右半部便是 A^{-1}, 即

$$[A \vdots I]_{n \times 2n} \xrightarrow{\text{经初等行变换}} [I \vdots A^{-1}]_{n \times 2n}.$$

例 7-19 试用初等行变换求矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1}.



$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&2&0&0\\3&7&2&3\\2&5&1&2\end{bmatrix}$$

解：

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&0&0&1&0&0&0\\1&2&0&0&0&1&0&0\\3&7&2&3&0&0&1&0\\2&5&1&2&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-r_1,\ r_3-3r_1}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&4&2&3&-3&0&1&0\\0&3&1&2&-2&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_2]{r_1-r_2,\ r_3-4r_2}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&2&-1&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&2&3&1&-4&1&0\\0&0&1&2&1&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&2&-1&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&2&1&-3&0&1\\0&0&2&3&1&-4&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_4-2r_3}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&2&-1&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&2&1&-3&0&1\\0&0&0&-1&-1&2&1&-2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)\times r_4}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&2&-1&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&2&1&-3&0&1\\0&0&0&1&1&-2&-1&2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_4}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&2&-1&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&-1&1&2&-3\\0&0&0&1&1&-2&-1&2\end{array}\right],$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\-1&1&0&0\\-1&1&2&-3\\1&-2&-1&2\end{bmatrix}.$$

对可逆矩阵 A 也可进行初等列变换求逆，用如下方式进行：

$$\begin{bmatrix}A\\\cdots\\I\end{bmatrix}_{2n\times n}\xrightarrow{\text{经初等列变换}}\begin{bmatrix}I\\\cdots\\A^{-1}\end{bmatrix}_{2n\times n}$$

在这里特别指出：用初等变换求逆矩阵时，或者对行或者对列，二者不能同时进行.

三、矩阵的初等行变换与线性方程组

线性方程组是线性代数的重要内容之一，自然科学和社会科学中许多问题都可以归结为求解一个线性方程组的问题.

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{7-5}$$

当常数项 b_1、b_2、$\cdots$、b_m 全为零时，方程组(7-5)式称为**齐次线性方程组**(**system of linear homogeneous equation**)，当常数项 b_1、b_2、$\cdots$、b_m 不全为零时，方程组(7-5)为**非齐次线性方程组**(**system of linear nonhomogeneous equation**).

方程组(7-5)的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

将方程组的常数项添加在矩阵 A 的最右边构成一个 $m \times (n+1)$ 矩阵

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

把矩阵 B 称作方程组(7-5)的增广矩阵.

对线性方程组(7-5)，它的非齐次线性方程组、齐次线性方程组及增广矩阵可用矩阵分别表示为：

$$A_{m\times n}X_{n\times 1} = b_{m\times 1}, \quad A_{m\times n}X_{n\times 1} = O_{m\times 1}, \quad B = [A \vdots b]_{m\times(n+1)}.$$

对于线性方程组(7-5)，如何判定它是否有解？如果有解，解的情况如何？有下述定理：

定理 7-5 线性方程组(7-5)有解的充分必要条件是它的系数矩阵 A 与增广矩阵 B 有相同的秩，即 $R(B)=R(A)$；并且 $R(A)=n$ 时方程组(7-5)有唯一解，$R(A)<n$ 时方程组(7-5)有无穷多解. 证明略.

经常对增广矩阵实行初等行变换解线性方程组，这种方法类同用消去法解线性方程组. 应该注意的是，对增广矩阵 B 实行矩阵的初等列变换，会改变线性方程组变量 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的排列顺序，因此不能进行初等列变换. 对增广矩阵实行初等行变换不改变增广矩阵 B 和系数矩阵 A 的秩. 下面讨论定理 7-5 的应用.

例 7-20 判断线性方程组解的情况

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases}$$

解 对增广矩阵 B 实行初等行变换：

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+(-3)r_1 \\ r_4+2r_1}]{r_2+(-1)r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\0 & -1 & -3 & 1\\0 & 0 & -7 & 2\\0 & 0 & 7 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\0 & -1 & -3 & 1\\0 & 0 & -7 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

经过初等行变换后，增广矩阵与系数矩阵秩相等，即 $R(A)=R(B)$，则方程组有解；又因 $R(A)=3=n$，所以方程组有唯一解.

在求线性方程组的解时，我们应该注意遵守下面三个原则：

（1）对于方程组只进行初等行变换，它不会影响方程组的解，即原来方程组和变换后的方程组是等价(或同解)方程组.

（2）矩阵 B 经初等行变换后，若其一行全为0，那么这一行所确定的方程是多余的方程(因为它对任何解都满足)，可以去掉这一行的方程；若在 B 中能找到不为0的 K 阶子式，那么这 K 阶子式所对应的方程是保留方程，所有这些保留方程组与原方程组具有相同的解.

（3）在对 B 进行初等行变换中，时刻判断增广矩阵的秩是否等于系数矩阵的秩(即判断增广矩阵和系数矩阵中存在的最高阶不为0的 K 阶子式阶数是否相等)，若不等，方程组无解；若相等，秩数等于变量个数(n)则有唯一解，秩数不等于变量个数(n)则方程组有无穷多解.

将例7-20问题改为求解线性方程组. 根据上述原则(2)，可去掉增广矩阵变化后第四行元素(因为这行全为0)，又因为经过初等行变换后的增广矩阵中，有三阶子式不为零，即

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\0 & -1 & -3\\0 & 0 & -7\end{vmatrix}=7\neq0$$

所以原方程组同解方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=1\\ \quad -x_2-3x_3=1\\ \qquad\quad -7x_3=2.\end{cases}$$

而且变量个数与增广矩阵秩数相同，故原方程组有唯一解：

$$x_3=-\frac{2}{7};\ x_2=-1+\frac{6}{7}=-\frac{1}{7};\ x_1=1+\left(-\frac{1}{7}\right)-2\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{10}{7}.$$

例7-21 求解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0.\end{cases}$$

解 对增广矩阵作初等行变换

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\3 & -1 & -3 & 4 & 4\\1 & 5 & -9 & -8 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1 & 1 & -3 & -1 & -1\\0 & -4 & 6 & 7 & 1\\0 & 4 & -6 & -7 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow[\left(\frac{1}{4}\right)\times r_3]{r_2+r_3}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -3 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -\frac{6}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{6}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4}\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -\frac{6}{4} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$

显然 $R(A)=R(B)$，即增广矩阵和系数矩阵都是最大阶为 2 的行列式不为零，即方程有解；又因 $R(A)=2<4=n$，所以方程组有无穷多组解，与原方程组的同解方程组是

$$\begin{cases} x_1 \quad -\dfrac{6}{4}x_3+\dfrac{3}{4}x_4=\dfrac{5}{4} \\ x_2-\dfrac{6}{4}x_3-\dfrac{7}{4}x_4=-\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

通常自由变量的个数为 $n-R(A)$ 个．可在 X_1、X_2、X_3、X_4 中任选两个变量为自由变量，选 X_3、X_4 为自由变量，并令 $X_3=C_1$，$X_4=C_2$，故解得一般解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{5}{4}+\dfrac{6}{4}C_1-\dfrac{3}{4}C_2 \\ x_2=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{6}{4}C_1+\dfrac{7}{4}C_2 \\ x_3=C_1 \\ x_4=C_2. \end{cases}$$

当 $C_1=0$，$C_2=0$ 时，例 7-21 有一个特解：$x_1=\dfrac{5}{4}$，$x_2=-\dfrac{1}{4}$，$x_3=0$，$x_4=0$.

例 7-22 求解方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=2 \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=3. \end{cases}$$

解

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+(-2)r_1]{r_2+(-3)r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

在 B 中第三行所表示的方程出现矛盾：$0=2$．这时 $R(A)=2\neq 3=R(B)$，故原方程组无解.

对于式(7-5)的线性方程组，若右端常数项全为零，则为齐次线性方程组．它的系数矩阵 A 与增广矩阵 B 的秩总是相等的，即 $R(A)=R(B)$，所以齐次线性方程组总是有解的，并由定理 7-5 知道：

(1) 当 $R(A)=n$ 时，齐次方程组有唯一一组零解 $(x_1=0, x_2=0, \cdots, x_n=0)$.

(2) 当 $R(A)<n$ 时，齐次线性方程组有无穷多组解，并容易知道齐次线性方程组有非零解的充要条件是 $R(A)<n$.

例 7-23 求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_5=0 \\ 2x_1-x_2+x_4-x_5=0 \\ 3x_1+x_2-x_3+x_4+2x_5=0 \\ -5x_2+2x_3+x_4-7x_5=0. \end{cases}$$

解

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-2)r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+(-1)r_2]{r_3+(-1)r_2}$$



$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0 & 3\\0 & -5 & 2 & 1 & -7\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1+(-2)r_2]{\left(-\frac{1}{5}\right)r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5}\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

由于 $R(A)=2<n=5$，故有非零解，其原方程组的同解方程组为：

$$\begin{cases}x_1-\frac{1}{5}x_3+\frac{2}{5}x_4+\frac{1}{5}x_5=0\\x_2-\frac{2}{5}x_3-\frac{1}{5}x_4+\frac{7}{5}x_5=0.\end{cases}$$

令 $x_3=c_1$，$x_4=c_2$，$x_5=c_3$ 故得非零解：

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{5}C_1-\frac{2}{5}C_2-\frac{1}{5}C_3\\x_2=\frac{2}{5}C_1+\frac{1}{5}C_2-\frac{7}{5}C_3\\x_3=C_1\\x_4=C_2\\x_5=C_3.\end{cases}$$

例 7-24　在图 7-1 中，设血液往血管分支点流动的流率为 z，经两支血管离开分支点的流动的流率分别为 x 和 y，则 $z=x+y$. 又假设各条血管距支点一定距离处的压强分别为 p_x、p_y 及 p_z，血管端点的压强为 p_x、p_y、p_z，这些都是可以测得的，在支点的压强为 p. 试用线性方程组求出 x、y、z 及 p.

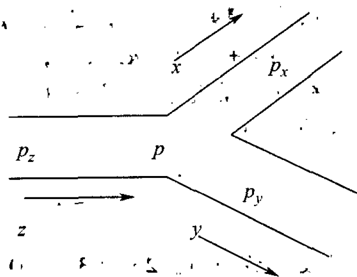


图 7-1

解　假设压降（对分支点的压强差）与流率成正比，则得

$$\begin{cases}x+y-z=0\\R_zz+p=p_z\\-R_xx+p=p_x\\-R_yy+p=p_y.\end{cases}$$

其中 R_z、R_y、R_x 分别为三条血管相应的比例系数，于是问题变成(7-5)式的非齐次线性方程组，方程组的系数矩阵的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & R_z & 1\\-R_x & 0 & 0 & 1\\0 & -R_y & 0 & 1\end{vmatrix}=-(R_xR_y+R_yR_z+R_zR_x)\neq 0.$$

即增广矩阵秩与系数矩阵秩相等，且秩数也等于变量个数 4，非齐次线性方程组有唯一解：

$$x=\frac{R_y(p_z-p_x)-R_z(p_x-p_y)}{R_xR_y+R_yR_z+R_zR_x};$$

$$y=\frac{R_z(p_x-p_y)-R_x(p_y-p_z)}{R_xR_y+R_yR_z+R_zR_x},$$

$$z=\frac{R_y(p_z-p_x)-R_x(p_y-p_z)}{R_xR_y+R_yR_z+R_zR_x};$$

$$p=\frac{R_xR_yp_z+R_yR_zp_x+R_zR_xp_y}{R_xR_y+R_yR_z+R_zR_x}.$$

第四节 向量组与线性方程组解的结构

为了研究一般线性方程组的理论，本节将讨论向量组的有关概念和性质，从而研究线性方程组的解的结构．熟悉这些概念对于代数知识的学习是十分必要的．

一、向量之间的关系

定义 7-13 n 个有次序的数 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 所组成的数组称为 n **维向量**，记作$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 a_i 称为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的第 i 个分量．

所有的分量均为实数的向量称为实向量，一般我们只讨论实向量．n 维向量用粗体英文字母 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{x}$、$\cdots$或者英文小写斜体符号 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\cdots$表示．如 $\boldsymbol{i}=(1,0)$、$\boldsymbol{j}=(0,1)$是二维向量；$\vec{a}=(1,1,1)$、$\vec{b}=(1,1,0)$、$\vec{c}=(1,0,0)$是三维向量．若 n 维向量$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$中每一个分量均为 0，即 n 维向量$(0,0,\cdots,0)$称为**零向量**，记作$\vec{0}_n$ 或 $\boldsymbol{0}$．

由于行(列)向量也可以称作行(列)矩阵，因此也可以用大写英文斜体字母如 A、X 表示．为了简洁起见，这里我们主要用希腊字母 α、β、ξ、$\eta\cdots$表示向量．

向量之间存在一个向量由几个向量表示的情况．例如 $\beta=(2,-1,1)$，$\alpha_1=(1,0,0)$，$\alpha_2=(0,1,0)$，$\alpha_3=(0,0,1)$，那么有 $\beta=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$ 成立．β 是 α_1、α_2、α_3 的线性组合．因此给出向量表示定义：

定义 7-14 对于给定向量 β、α_1、α_2、$\cdots$、α_s，如果存在一组数 κ_1、κ_2、$\cdots$、κ_s使关系式 $\beta=\kappa_1\alpha_1+\kappa_2\alpha_2+\cdots+\alpha_s\kappa_s$ 成立，则称 β 为 α_1、α_2、$\cdots$、α_s 的线性组合或线性表示．

在什么情况下有限个向量的线性组合为零向量，对向量之间研究有特殊意义．例如，对这两组向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix};\ \beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

我们很容易知道：$2\alpha_1+3\alpha_2=0$．而对于 β_1、β_2，只有 $0\beta_1+0\beta_2=0$．因此，我们称 α_1、α_2 向量组为线性相关；称 β_1、β_2 向量组为线性无关．

定义 7-15 对于向量组 α_1、α_2、$\cdots$、α_s，如果存在一组不全为 0 的数 κ_1、κ_2、$\cdots$、κ_s，使关系式 $\kappa_1\alpha_1+\kappa_2\alpha_2+\cdots+\kappa_s\alpha_s=0$ 成立，那么称向量组 α_1、α_2、$\cdots$、α_s 线性相关；如果 $\kappa_1\alpha_1+\kappa_2\alpha_2+\cdots+\kappa_s\alpha_s=0$ 当且仅当 $\kappa_1=\kappa_2=\cdots=\kappa_s=0$ 时成立，则称向量组 α_1、α_2、$\cdots$、α_n 线性无关．

例 7-25 证明向量组$(1,0,0,0)$、$(0,1,0,0)$、$(0,0,1,0)$、$(0,0,0,1)$线性无关．

证 $a(1,0,0,0)+b(0,1,0,0)+c(0,0,1,0)+d(0,0,0,1)=(a,b,c,d)=(0,0,0,0)$，上式当且仅当 $a=b=c=d=0$ 时才成立，因此该组向量线性无关．

例 7-26 说明 $\alpha_1=(2,-1,3)$、$\alpha_2=(4,-2,5)$、$\alpha_3=(2,-1,4)$线性相关．

解 因为存在不全为零的数 $k_1=3$，$k_2=-1$，$k_3=-1$ 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$$

成立，所以 α_1、α_2、α_3 线性相关．

例 7-27 利用初等变换将 $\alpha_1=(1,-1)$，$\alpha_2=(1,1)$表示 $\beta=(2,-1)$．

解 因为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

所以

$$\beta=\frac{1}{2}(3\alpha_1+\alpha_2).$$

定义 7-16 设 A 是一个 n 维向量组，α_1、α_2、…、α_r 是向量组 A 中的部分向量. 如果

1）α_1、α_2、…、α_r 线性无关；

2）向量组 A 中任意一个向量都可以由 α_1、α_2、…、α_r 线性表示. 那么称 α_1、α_2、…、α_r 为向量组 A 的一个**极大线性无关组，或极大无关组**.

设 $\alpha_1=(2,-1,3,1)$，$\alpha_2=(4,-2,5,4)$，$\alpha_3=(2,-1,4,-1)$，显然 α_1、α_2 是线性无关的，同时有 $\alpha_3=3\alpha_1-\alpha_2$，所以 α_1、α_2 是 α_1、α_2、α_3 的一个极大无关组. 另外，还可以断定 α_2、α_3 也是 α_1、α_2、α_3 的一个极大无关组，可见一个向量组的极大无关组不是唯一的.

二、齐次线性方程组解的结构

当方程组的解不止一个时，它的解与解之间有怎样的关系？解的结构如何？我们先研究齐次线性方程组解的结构，后研究非齐次线性方程组解的结构.

设齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0,\end{cases}$$

其矩阵形式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$. 当 $x_1=u_1,x_2=u_2,\cdots,x_n=u_n$ 是齐次线性方程组的一个解，其解向量形式

$$\xi=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}.$$

我们知道齐次线性方程组不存在无解情况，除 n 维零向量 $\boldsymbol{0}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组的一个解向量外，若齐次线性方程组有非零解，则其解一定有无穷多个. 当齐次线性方程组有无穷多个解时，其解集合就构成一个向量组，在解向量组的集合中，如果能求出这个向量组的一个极大无关组，则齐次线性方程组的全部解就可由这个极大无关组线性表示，同时得到齐次线性方程组的通解.

定义 7-17 若 ξ_1、ξ_2、…、ξ_s 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 解向量组的一个极大无关组，则称 ξ_1、ξ_2、…、ξ_s 是齐次线性方程组的一个**基础解系**，即它满足

（i）ξ_1、ξ_2、…、ξ_s 线性无关；

（ii）方程组的任一解都可表示为 ξ_1、ξ_2、…、ξ_s 的线性组合.

根据定义，如果齐次线性方程组有非零解向量，就找出它的基础解系，然后每一个解都可以表示成基础解系的线性组合，于是也就找到了齐次线性方程组的全部解向量（通解）.

定理 7-6 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，当 $R(A)=r<n$ 时，则齐次线性方组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的存在基础解系，且基础解系含 $n-r$ 个向量 ξ_1、ξ_2、…、ξ_{n-r}，线性组合

$$\eta=\eta_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}$$

是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的全部解（通解），c_1、c_2、…、c_{n-r} 为任意常数.

例 7-28 求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

解 计算得 $R(A) = 2$. 由于前两个方程中 x_1、x_3 的系数行列式不为 0，故可取同解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = x_2 - x_4 \\ x_1 + x_3 = x_2 + 3x_4. \end{cases}$$

又解同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 2x_4, \end{cases}$$

得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是方程组的解，且这 $n-r$ 个解向量线性无关，从而得一个基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}、\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

因此通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$，即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意实数}).$$

例 7-29 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系，并写出通解表达式.

解 由于 $m = 4 < 5 = n$，必有 $R(A) < n$，所以方程组有无穷多个非零解，我们寻找解向量的最大线性无关组. 对系数矩阵 A 作初等行变换如下：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_1]{\substack{r_4 - 3r_1 \\ r_3 - 2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + 2r_2]{r_4 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

所以秩 $R(A)=2$，且最后一个初等变换的矩阵前二行前二列为二阶单位矩阵，可选取 x_3、x_4、x_5 为自由变量，所以，初等变换后原方程的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1 = -2x_3 - x_4 + 2x_5\\ x_2 = x_3 - 3x_4 + x_5.\end{cases}$$

分别设自由变量 $x_3=k_1$，$x_4=k_2$，$x_5=k_3$，有

$$\begin{cases}x_1 = -2k_1 - k_2 + 2k_3\\ x_2 = k_1 - 3k_2 + k_3\\ x_3 = k_1\\ x_4 = k_2\\ x_5 = k_3\end{cases}\quad 即\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

记

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}、\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}、\xi_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

则 ξ_1、ξ_2、ξ_3 是解向量的极大线性无关组，无关组的向量个数等于 $n-r$，所以 ξ_1、ξ_2、ξ_3 为原方程组的一个基础解系，且方程组的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3. \qquad (k_1、k_2、k_3 \text{ 为任意常数})$$

三、非齐次线性方程组解的结构

对非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}$$

其中 $b_1、b_2、\cdots、b_m$ 不全为零；我们将非齐次线性方程组右端的常数项换为零，得到的齐次线性方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0.\end{cases}$$

对应非齐次和齐次线性方程组的矩阵形式分别为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，它们的解之间存在着密切的关系.

定理 7-7 如果 η_0 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解向量(**特解**)，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解向量 $\boldsymbol{\eta}$ 总可以表示成

$$\eta=\eta_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中向量组 ξ_1、ξ_2、…、ξ_{n-r} 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一个基础解系，c_1、c_2、…、c_{n-r} 为任意常数.

于是当 $R(A)=r<n$ 时，要求出非齐次线性方程组的全部解，只需找到 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解（即特解）和求出 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解即可. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解就为

$$\eta=\eta_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}.$$

例 7-30 讨论当 λ 取何值时，以下方程组有解？并求其解.

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2.\end{cases}$$

解 非齐次方程组的系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{bmatrix}$，增广矩阵

$$B=\begin{bmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{bmatrix}.$$

Ⅰ）当 $|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}\neq0$ 时，方程组有唯一解. 由 $|A|=(2+\lambda)(\lambda-1)^2\neq0$，即当 $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时，方程组有唯一解，并且当 λ 值给定时，其解可用克莱姆法则求得，其解是 $x_1=\dfrac{-\lambda-1}{\lambda+2}$，$x_2=\dfrac{1}{\lambda+2}$，$x_3=\dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$.

Ⅱ）当 $\lambda=-2$ 时，则 $|A|=\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{vmatrix}=0$，但 A 中存在一个二阶子式 $\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}=3\neq0$，所以 $R(A)=2$；又 B 中存在一个三阶子式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&1&-2\\1&-2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&3&0\\1&-3&3\end{vmatrix}=9\neq0$，所以 $R(B)=3$. 因为 $R(A)\neq R(B)$，所以方程组无解.

Ⅲ）当 $\lambda=1$ 时，则 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0$，且 A 的所有二阶子式都为 0，而一阶子式不为 0，所以 $R(A)=1$，而 $B=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ 的秩 $R(B)=1=R(A)<3$（未知数的个数），从而方程组有无穷多个解. 此时，方程组与 $x_1+x_2+x_3=1$ 同解. $x_1=-x_2-x_3+1$，令 $x_2=x_3=0$，则 $x_1=1$，于是得方程组的一个特解 $\eta^*=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

方程组对应的齐次方程组是$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$，此方程组与 $x_1+x_2+x_3=0$ 同解. $x_1=-x_2-x_3$，令 $x_2=1$，$x_3=0$ 可得 $x_1=-1$，令 $x_2=0$，$x_3=1$，可得 $x_1=-1$. 于是得方程组的通解 $\xi=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$. 故方程组的通解是$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\eta^*+\xi=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

其中 k_1、k_2 自由取值.

第五节　矩阵的特征值与特征向量

矩阵的**特征值**(**eigen value**)与**特征向量**(**eigen vector**)不仅在理论研究上很重要，而且在数学上的特征向量空间、医学上的莱斯利(LesLie)人口模型和多变量分析、工程技术中的振动和稳定性问题，都用到矩阵的特征值和特征向量.

定义 7-18　设 A 是 n 阶方阵，如果数 λ 和具有 n 行的列矩阵 X(n 维列向量)使下式成立

$$AX=\lambda X. \tag{7-6}$$

则称数 λ 为方阵 A 的特征值，非零列向量 X(n 维列向量)称为矩阵 A 的特征值 λ 对应的特征向量.

将式(7-6)写成

$$AX=\lambda IX,$$

移项得

$$(\lambda I-A)X=\boldsymbol{0}. \tag{7-7}$$

其中 $\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{bmatrix}$

叫做 A 的特征矩阵.

将式(7-7)展开为 n 元齐次线性方程组，即：

$$\begin{cases}(\lambda-a_{11})x_1-a_{12}x_2-\cdots-a_{1n}x_n=0\\-a_{21}x_1+(\lambda-a_{22})x_2-\cdots-a_{2n}x_n=0\\-a_{1n}x_1-a_{2n}x_2-\cdots+(\lambda-a_{nn})x_n=0.\end{cases}$$

它有非零解的充分必要条件是系数行列式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0.$$

$|\lambda I-A|$是关于 λ 的 n 次多项式，称为矩阵 A 的特征多项式，$|\lambda I-A|=0$则称为矩阵 A 的特征方程. A 的特征值正是它的特征方程的解，而特征向量即是齐次线性方程组$(\lambda I-A)X=0$ 的非零解向量. 这里顺便指出，特征向量 X 有无穷多个. 若特征值 λ 为实数，则 X 可取实数向量；若 λ 为复数，则 X 为复向量. 本节只讨论实数特征值.

另外，可给出求矩阵 A 的特征值和特征向量的具体方法：1. 用求行列式的方法计算

特征多项式 $|\lambda I-A|$；2. 解特征方程 $|\lambda I-A|=0$，求出特征值 λ；3. 把每一个特征值代入齐次线性方程组 $(\lambda I-A)X=0$，求出方程组的无穷多个非零解 X，即是属于 λ 的特征向量.

例 7-31 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$$

的特征值和特征向量.

解 1. 计算特征多项式：将三阶行列式 $|\lambda I-A|$ 第二行乘 (-1) 后分别加到第一、三行；再将第一、三列分别加到第二列

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&0\\-2&\lambda-5&-2\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5);$$

2. 求特征方程的特征根：$(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$，$\lambda_1=-1$ 为二重根，$\lambda_2=5$ 为一重根；

3. 求特征向量：把特征值 -1 代入齐次线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda-1)x_1 & -2x_2 & -2x_3=0\\ -2x_1+(\lambda-1)x_2 & -2x_3=0\\ -2x_1 & -2x_2+(\lambda-1)x_3=0,\end{cases}$$

得到

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

上述方程组系数矩阵秩为 1，原方程组的同解方程组为 $x_1+x_2+x_3=0$，选 x_2、x_3 为自由变量，再将非零向量表示为自由变量对应的列矩阵形式，即得到对应 $\lambda_1=-1$ 的无穷多个特征向量：

$$\begin{cases}x_1=-x_2-x_3\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}=x_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

当 $x_2=0$，$x_3=1$，非零解向量 $X=[-1\quad 0\quad 1]^T$ 是属于 $\lambda_1=-1$ 的一个特征向量.

同样，把 $\lambda_2=5$ 代 λ 齐次线性方程组 $(\lambda I-A)X=0$，对应特征值 $\lambda_2=5$ 的无穷多个特征向量为：

$$\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3=x_3\\x_3=x_3\end{cases}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

当自由变量 $x_3=1$，非零解向量 $X=[1\quad 1\quad 1]^T$ 是属于 $\lambda_2=5$ 的一个特征向量.

通过上面计算，特征向量不是由一个特征值唯一确定的；反之，不同特征值对应的特征向量决不会相等，也就是说一个特征向量只能属于一个特征值.

例 7-32 设 λ 是方阵 A 的特征值，证明

（1）λ^2 是 A^2 的特征值；

（2）当 A 可逆时，$\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

证 因 λ 是 A 的特征值，故有 $\boldsymbol{p}\neq 0$ 使 $A\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$. 于是

（1） $$A^2\boldsymbol{p}=A(A\boldsymbol{p})=A(\lambda\boldsymbol{p})=\lambda(A\boldsymbol{p})=\lambda^2\boldsymbol{p},$$



所以 λ^2 是 A^2 的特征值.

（2）当 A 可逆时，由 $A\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$. 有 $\boldsymbol{p}=\lambda A^{-1}\boldsymbol{p}$，因 $\boldsymbol{p}\neq 0$，知 $\lambda\neq 0$，故

$$A^{-1}\boldsymbol{p}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{p},$$

所以$\frac{1}{\lambda}$是 A^{-1}的特征值. 证毕

习　题　七

1. 计算下列各行列式的值

（1）$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$；（3）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

2. 计算行列式

（1）$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}$.

3. 计算 n 阶行列式

（1）$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$.

4. 计算 n 阶范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

5. 问 λ 取何值时，下列齐次线性方程组有非零解？

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

6. 试确定以下矩阵中的未知数 a、b、c

（1）$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & -1 \\ 0 & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$；

（2）$\begin{bmatrix} a^2 & 1 & b^2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ -1 & c & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 15 & -3 & 7 \\ 2 & -8 & -5 \end{bmatrix}$.

7. 设矩阵

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

（1）求 $3A-B$；

（2）解矩阵方程 $A+X=B$，求 X；

（3）解矩阵方程 $(2A+Y)+2(B-Y)=O_{3\times4}$ 求 Y.

8. 计算下列矩阵的乘积

（1）$\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\-1&1&3&0\\0&5&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&4\\1&2&1\\3&1&-1\\-1&2&1\end{bmatrix}$；

（2）$[2\quad 3\quad 4]\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}[2,\ 3\quad 4]$；（4）$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$.

9. 设矩阵 $A=[1\quad -1\quad 2]$，$B=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&1&3\\4&2&1\end{bmatrix}$，求 $(AB)^{\mathrm{T}}$.

10. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&4\\1&-1\\3&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&3&1\\2&1&0\end{bmatrix}$，验证 $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

11. 用伴随矩阵的方法求以下矩阵的逆

（1）$\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}$；（4）$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$.

12. 已知 $A^2+2A+I=0$，求证 $A^{-1}=-A-2I$.

13. 解下列矩阵方程

（1）$\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2\\5&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\\-5&6\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-6\\2&1\end{bmatrix}$

（3）$\begin{bmatrix}1&4\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1\\0&-1\end{bmatrix}$.

14. 用初等行变换求矩阵的逆

（1）$\begin{bmatrix}0&1&3\\2&3&5\\3&5&7\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$.

15. 求下列矩阵的秩

$A=\begin{bmatrix}1&2&1&5\\2&-1&3&7\\3&1&1&6\end{bmatrix}$；$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&0\\2&3&3\\3&4&3\end{bmatrix}$.

16. 设 $3(\alpha_1-\alpha)+2(\alpha_2+\alpha)=5(\alpha_3-\alpha)$，其中 $\alpha_1=(2,5,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(10,1,5,10)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(4,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$. 求 α 向量由另外三个向量的线性表示.

17. 判断以下向量组是线性相关还是线性无关

（1）$(-1,3,1)^{\mathrm{T}}$，$(2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(1,4,1)^{\mathrm{T}}$；

（2）$(2,3,0)^{\mathrm{T}}$，$(-1,4,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,0,2)^{\mathrm{T}}$.

18. 解线性方程组



(1) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4 \\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1-x_2=3 \\ 2x_1-3x_3=-8 \\ x_1+x_2-3x_3=-10; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1-x_2+3x_3=7 \\ 3x_1+x_2+x_3=6; \end{cases}$　(4) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2. \end{cases}$

19. 求下列齐次线性方程组的基础解系

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ x_3+x_4+x_5=0; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=0 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=0. \end{cases}$

20. 求方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$的通解.

21. 解线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3 \end{cases}$$

λ 为何值时，(i)有唯一解；(ii)有无穷多解；(iii)无解.

22. 求下列矩阵的特征值和特征向量

(1) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;　(2) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

23. 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$，求 A 的特征值与对应的特征向量.

24. 设 λ_0 是矩阵 A 的特征值，k 是任意常数，则 $k\lambda_0$ 是矩阵 kA 的特征值.

25. 若矩阵 A 满足 $A^2=A$，证明：A 的特征值 λ_0 只能为 0 或 1.

习题参考答案

习 题 一

1. (1) $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$; (2) $[2,4]$; (3) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$;
   (4) $[-1,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$; (5) $[0,\sqrt{2})$; (6) $\{x:x\neq k\pi(k\in Z)\}$

2. $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $1+(\lg 2)^2$

3. (1) $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$; (2) $[2k\pi,(2k+1)\pi](k\in Z)$; (3) $\left[\frac{1}{e},1\right]$; (4) $[-1,1]$

4. (1) $y=\lg\tan(x+1)$ $x\in\left(k\pi-1,k\pi+\frac{\pi}{2}-1\right)$; (2) $y=(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$
   $x\in(-\infty,+\infty)$; (3) $y=1-x^3+\sin(1-x^3)$ $x\in(-\infty,+\infty)$;
   (4) $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$ $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

5. (1) $y=e^u$, $u=\arctan v$, $v=2x+1$; (2) $y=u^{\frac{3}{2}}$, $u=\sin v$; $v=x+2$;
   (3) $y=\tan u$, $u=v^{\frac{1}{2}}$, $v=\frac{1+x}{1-x}$; (4) $y=\cos u$, $u=v^3$, $v=\frac{1}{2}\ln\omega$, $\omega=x^2+1$.

6. $f(x)=x^2-x+1$

7. $f(x)=x^2+1$

8. (1) 0; (2) 0; (3) $\frac{1}{2}$

9. (1) 1; (2) $\frac{2}{3}$; (3) $\frac{1}{3}$; (4) ∞; (5) $-\frac{1}{16}$; (6) 1; (7) $-\frac{1}{2}$;
   (8) $\frac{1}{2}$; (9) $\frac{2}{\pi}$; (10) $\frac{1}{2}$; (11) $\frac{1}{e^2}$; (12) $\frac{1}{e^3}$; (13) $\frac{1}{e^2}$;
   (14) 1; (15) $\frac{3}{2}$; (16) e.

10. $b=-7$

11. $a=4$, $\frac{1}{4}$

12. (1) 高阶无穷小; (2) 高阶无穷小; (3) 同阶无穷小; (4) 等价无穷小;
    (5) 同阶无穷小; (6) 等价无穷小.

13. $a=2$

14. $a=1$

15. 在点 $x=0$ 处连续

16. 在点 $x=0$ 处不连续

17. $a=2$

18. (1) 间断点是 $x=1$, 连续区间是$(0,1)\cup(1,+\infty)$;
    (2) 间断点是 $x=2$ 和 $x=3$, 连续区间是$(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$;
    (3) 间断数是 $x=0$, 连续区间是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;
    (4) 间断点是 $x=1$, 连续区间为$[0,1)\cup(1,+\infty)$

19. 略.



20. 略.

习 题 二

1. 当 $t=2$ 时，$\bar{v}=56+\Delta t$. 当 $t=2$，$\Delta t=0.1$ 时，$\bar{v}=56.1$；当 $t=2$，$\Delta t=0.01$ 时，$\bar{v}=56.01$. $t=2$ 时，$v=56$.

2. (1) 2； (2) $-\dfrac{1}{(1+x)^2}$； (3) $\dfrac{1}{2}$； (4) $2(1-x)$.

3. (1) $2f'(x_0)$； (2) $f'(x_0)$； (3) $f'(x_0)$； (4) $(\alpha-\beta)f'(x_0)$.

4. 1.

5. (1) $x=0$ 点处 $f(x)$ 可导； (2) $x=0$ 点处 $f(x)$ 不可导.

6. $a=2$，$b=-1$.

*7. $e^{\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}$.

8. (1) $y=2-x$，$y=x$； (2) $y=-x-2$，$y=x$.

9. (1) $P(-1,-1)$，$P(1,1)$； (2) $Q(-2,-8)$，$Q(2,8)$.

10. $a=3$，$b=-1$，$c=1$，$d=3$；$f(x)=3x^4-x^3+x^2+3$.

11. (1) $ax^{a-1}+a^x\ln a$； (2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{x^2}$；

(3) $x\cos x$； (4) $(\ln x+1)\tan x+x\sec^2 x\ln x$；

(5) $\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$； (6) $-\dfrac{2}{x(1+\ln x)^2}$；

(7) $\dfrac{\arctan x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}+\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$；

(8) $(1+x\sec x)\tan x+x\sec^2 x+\sec x+\dfrac{1-2x\ln 2}{4^x}$.

12. (1) $12x(2x^2+3)^2$； (2) $-2\csc 2x$；

(3) $e^{\sin x}\cos x+\dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$； (4) $2\sqrt{a^2-x^2}$；

(5) $\dfrac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$； (6) $\dfrac{\cos(\ln x)}{x}-\tan x$；

(7) $\dfrac{2x-\cos x}{(x^2-\sin x)\ln 2}$； (8) $\dfrac{1}{1-x^4}$.

13. (1) $2x^{\ln x-1}\ln x$； (2) $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$；

(3) $(\sin x)^{\cos x}(\cos x\cot x-\sin x\ln\sin x)$； (4) $\dfrac{\ln(2x)+2}{2\sqrt{x}}(2x)^{\sqrt{x}}$；

(5) $2x^{2x}(\ln x+1)+(2x)^x(\ln 2x+1)$；

(6) $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x(x^3+1)}{(x-1)^2}}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{3x^2}{x^3+1}-\dfrac{2}{x-1}\right)$；

(7) $\dfrac{(x-2)^3\sqrt{x-5}}{6\sqrt[3]{x+1}}\left(\dfrac{18}{x-2}+\dfrac{3}{x-5}-\dfrac{2}{x+1}\right)$；

(8) $\dfrac{1}{4}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\dfrac{2}{x}+2\cot x-\dfrac{e^x}{1-e^x}\right)$.

14. (1) $\frac{e^y}{1-xe^y}$或$\frac{e^y}{2-y}$;　(2) $-\csc^2(x+y)$或$-\frac{1+y^2}{y^2}$;

(3) $\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$;　(4) $\frac{1-y(x+y)}{x(x+y)-1}$.

*15. 从略.

16. (1) $\frac{1}{x}$; (2) $2\arctan\frac{x}{2}+\frac{4x}{4+x^2}$; (3) $x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}$; (4) $2\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}$.

17. (1) $e^{-x}f'(x+e^{-x})+(1-e^{-x})^2f''(x+e^{-x})$;

(2) $\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}$.

18. (1) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$;　(2) $2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]$.

19. $v(4)=\frac{1}{4}$(米/秒); $a(4)=-\frac{1}{32}$(米/秒^2).

20. $Av_0e^{\frac{A}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})-\alpha t}$.

21. c_0ke^{-kt}.

22. (1) $\sec2t-\tan2t$;　(2) $\frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}$;　(3) -4;　(4) $\frac{3}{2}e^{-3t}$.

23. (1) $\frac{2x(3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}-1)}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}\mathrm{d}x$;　(2) $\frac{1+\sin^2x+2x\sin2x}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\left(\frac{e^x}{1+e^{2x}}+\frac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$;　(4) $-\frac{1}{(1+x^2)\arctan\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$;

(5) $\mathrm{d}x$;　(6) 0.005.

24. (1) $\sqrt{x}+c$;　(2) $-\frac{1}{x}+c$;　(3) $ax+c$;　(4) $\frac{1}{a}e^{ax}+c$;

(5) $-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)+c$;　(6) $\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+c$;

(7) $-\sqrt{1-x^2}+c$;　(8) $\ln|\varphi(x)|+c$.

25. (1) $\tan46°\approx1.0349$;　(2) $\sqrt[5]{34}\approx2.025$.

26. (1) 2; (2) $-\frac{1}{8}$; (3) 0; (4) 3; (5) 0; (6) $\frac{1}{2}$; (7) 1; (8) e^2; *(9) 1; *(10) e^2.

27. (1) 单调递减区间为$(-\infty,3)$; 单调递增区间为$(3,+\infty)$;

(2) 单调递减区间为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$; 单调递增区间为$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$;

(3) 单调递增区间为$(-\infty,1)$; 单调递减区间为$(1,+\infty)$;

(4) 单调递增区间为$(0,1)$; 单调递减区间为$(1,+\infty)$.

28. (1) 极小值为$f(-1)=-2$, 取极大值为$f(1)=2$;

(2) 取极小值为$f(e)=e$;

(3) 极小值为$f(-1)=-3$, 取极大值为$f(1)=3$;

(4) 极大值为$f(2)=3$, 极小值为$f(3)=0$;

29. $a=2$; 是极大值, 极大值为$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

30. (1) 最大值$y(-1)=e$, 最小值$y(0)=0$; (2) 最小值$y(-3)=27$, 无最大值.

31. $x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.



32. $t=1.66$ 个月.

33. $t=\frac{1}{2.1}\ln\frac{23}{2}\approx1.1630$，最高血药浓度 $40(e^{-0.2\times1.1630}-e^{-2.3\times1.1630})\approx28.9423$.

34. $t=48.084\text{min}$ 时，最大浓度值为 $c=13.122\text{mg}/100\text{ml}$.

35. 长、宽均为$\sqrt{2}R$.

36. $c=\frac{b}{aR}(\mu\text{F})$时，最小电能为 $20abR(\text{erg})$.

37. (1) 在定义域$(-\infty,+\infty)$内是凹的；
(2) 在定义域$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$内是凸的.

38. (1) 凹区间为$(-\infty,0)$，$\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$，凸区间为$\left(0,\frac{2}{3}\right)$；拐点为$(0,1)$，$\left(\frac{2}{3},\frac{11}{27}\right)$.
(2) 凸区间为$(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$，凹区间为$(-1,1)$；拐点为$(-1,\ln2)$，$(1,\ln2)$.
(3) 凸区间为$(-3,0)$，$(3,+\infty)$，凹区间$(-\infty,-3)$，$(0,3)$；拐点为$\left(-3,-\frac{9}{4}\right)$，$(0,0)$，$\left(3,\frac{9}{4}\right)$.
(4) 凸区间为$(-\infty,5)$，凹区间为$(5,+\infty)$；拐点为$(5,11)$.

*39. $a=1$，$b=-3$，$c=-24$，$d=16$；$f(x)=x^3-3x^2-24x+16$.

40. (1) $y=0$ 为曲线的水平渐近线；$x=-1$、$x=5$ 为曲线的垂直渐近线；
(2) $x=0$ 为曲线的垂直渐近线；$y=x+2$ 为曲线的斜渐近线；
(3) $y=1$ 为曲线的水平渐近线；$x=-1$、$x=1$ 为曲线的垂直渐近线；
(4) $x=0$ 为曲线的垂直渐近线；$y=x$ 为曲线的斜渐近线.

41. 从略.

42. 从略.

习　题　三

1. (1) $\frac{x^2}{4}+x+C$；　(2) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$；　(3) e^x-2x+C；
(4) $-3\cos x+C$；　(5) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$；　(6) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x+C$；
(7) $\tan x-x+C$；　(8) $x-\cos x+\sin x+C$；　(9) $2\sqrt{x}+C$；
(10) $4x-6\sqrt{x}-5\ln|x|+C$；　(11) $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+9x+C$；
(12) $\arcsin x+C$；　(13) $\sin x-\cos x+C$；　(14) $\tan x-\cot x+C$.

2. (1) $\frac{1}{4}\sin^4x+C$；　(2) $-\frac{2}{5}\cos^5x+C$；　(3) $\frac{3}{2(1-2x)}+C$；
(4) $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$；　(5) $\frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+C$；　(6) $\ln|x^2-3x+8|+C$；
(7) $\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$；　(8) $-\frac{1}{18}(3-2x)^9+C$；　(9) $\frac{1}{3}\arctan3x+C$；
(10) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C$；　(11) $-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})+C$；

(12) $\ln\left|\sec x+\sqrt{1+\sec^2 x}\right|+C$; (13) $\frac{3}{8}x-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$;

(14) $-\ln|\sin x\cos x|+C$; (15) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}+C$; (16) $-\frac{\cot^3 x}{3}-\cot x+C$;

(17) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$; (18) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C$; (19) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$;

(20) $-\frac{\sqrt{x^2+3}}{3x}+C$; (21) $\sqrt{x^2-4}-2\arctan\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+C$;

(22) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

3. (1) $-e^{-x}(x+1)+C$; (2) $-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$;

(3) $\frac{x^3}{6}+\frac{x^2\sin 2x}{4}+\frac{x\cos 2x}{4}-\frac{\sin 2x}{8}+C$; (4) $x\ln(x^2+1)-2x+2\arctan x+C$;

(5) $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$; (6) $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]+C$;

(7) $-\frac{1}{x}[(\ln x)^3+3(\ln x)^2+6\ln x+6]+C$; (8) $\tan x\cdot\ln\cos x+\tan x-x+C$;

(9) $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+C$; (10) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$;

(11) $x\ln^2 x-2x(\ln x-1)+C$; (12) $\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C$.

4. (1) $6\ln|x-3|-5\ln|x-2|+C$;

(2) $\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)-\arctan(x+2)+C$;

(3) $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$; (4) $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|+C$;

(5) $-2\cos\sqrt{x}+C$; (6) $-e^{\frac{1}{x}}+C$;

(7) $\frac{(\arcsin x)^4}{4}+C$; (8) $\frac{(\arctan x)^2}{2}+C$;

(9) $\frac{2\sqrt{25+3x}}{3}+C$;

(10) $\frac{2}{9}\left[\frac{\sqrt{(25+3x)^3}}{3}-25\sqrt{25+3x}\right]+C$;

(11) $\frac{1}{3}\left[x^3\arctan x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]+C$; (12) $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$;

(13) $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$; (14) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$;

(15) $-\sin x-\frac{2\cos x}{x}+C$; (16) $\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\sin 2x}{4x}+C$.

5. $\frac{b^2-a^2}{2}$.

6. (1) $2x\sqrt{1+x^4}$; (2) $5x^4\cos x^{10}-4x^3\cos x^8$; (3) $\frac{1}{2e}$; (4) $\frac{\pi^2}{4}$;

(5) 0; $-\sin a^2$; $\sin b^2$.

7. (1) $11\frac{1}{4}$; (2) 2; (3) $\frac{\pi}{6}$; (4) $\frac{\pi}{3}$; (5) 4π; (6) $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$;



(7) $\frac{1}{a}$; (8) $\frac{1}{6}$; (9) $\frac{\pi a^4}{16}$; (10) $2-\frac{\pi}{2}$; (11) $\frac{4}{5}$; (12) $\cos1-\frac{1}{2}$.

8. 证明(略).

9. 证明(略).

10. 5.

11. $\frac{kb^4}{12}$.

12. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{1}{3}$; (3) 发散; (4) 发散; (5) 发散; (6) 1.

13. $10\frac{2}{3}$.

14. $5\frac{1}{3}$.

15. $b-a$.

16. $\frac{4}{3}\pi a^2b$.

17. $\frac{8}{3}\pi a^2b$.

18. $\frac{3}{10}\pi$

19. $R^2gm\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+H}\right)$; mgR，其中 R 为地球半径.

20. $kq_0q\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$.

21. $k\ln\left|\frac{b}{a}\right|$.

22. $\frac{C}{V_2-V_1}\ln\left|\frac{V_2}{V_1}\right|$.

23. (1) 1; 0.6; (2) 1.0125.

24. 最大值 $f(0)=0$，最小值 $f(4)=-\frac{32}{3}$

25. 最大值 $f(1)=\frac{1}{6}$，最小值 $f(0)=0$

26. $\tan\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-4}$.

27. 证明(略).

28. 证明(略).

29. $\arcsin\frac{1}{3}$.

习 题 四

1. (1) $D=\{(x,y)\mid y^2>4(x-2)\}$; (2) $D=\{(x,y)\mid 4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9\}$;
   (3) $D=\{(x,y)\mid y\geqslant 0,x\geqslant 0,x^2\geqslant y\}$; (4) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$.

2. (1) 0; (2) $-\frac{1}{4}$; (3) 2; (4) 25.

3. (1) $x^2+y^2=1$; (2) $x=\pm y$; (3) $x=k_1\pi$, $y=k_2\pi$(k_1、k_2 为任意整数).

4. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$;

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+2x}{y^2}e^{2x+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}e^{2x+y}\left(1-\frac{2}{y}\right)$;

(3) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{z}$;

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\ln(x+\ln y)(x+\ln y)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y\ln(x+\ln y)(x+\ln y)}$;

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$;

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+x)^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=(1+x)^y\ln(1+x)$.

5. (1) $f'_x(3,4)=\frac{2}{5}$, $f'_y(3,4)=\frac{1}{5}$;

(2) $f'_x\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=-1$, $f'_y\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=0$.

6. (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x-6y^2+1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-12xy$;

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2a^2\cos2(ax+by)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2b^2\cos2(ax+by)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2ab\cos2(ax+by)$.

7. (1) $dz=e^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)$; (2) $dz=\frac{ydx-xdy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$;

(3) $dz=y^2x^{y-1}dx+x^y(1+y\ln x)dy$; (4) $dz=\frac{2}{(x-y)^2}(xdy-ydx)$.

8. $dz=0.08$.

9. (1) $\frac{dz}{dt}=-e^{-t}-e^t$;

(2) $\frac{dz}{dt}=\frac{2\tan t}{t\cos^2 t}-\frac{1}{t^2\cos^2 t}$;

(3) $\frac{dz}{dx}=-\frac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}$;

(4) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2u}{v^2}\ln(3u-2v)+\frac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$,

$\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{2u^2}{v^3}\ln(3u-2v)-\frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$.

10. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\frac{\partial z}{\partial u}+ye^{xy}\frac{\partial z}{\partial v}=2xf'_u+ye^{xy}f'_v$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=-2y\frac{\partial z}{\partial u}+xe^{xy}\frac{\partial z}{\partial v}=-2yf'_u+xe^{xy}f'_v$;

(2) $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}+yz\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}+xz\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial u}+xy\frac{\partial w}{\partial v}$.

11. 12. (略)

13. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^z-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{e^z-xy}$;

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3yz-x}{z-3xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3xz-y}{z-3xy}$;



(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z^2}{2y-3xz}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{3xz-2y}$；

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$.

14. (1) 在点$(2,-2)$处，极大值$f(2,-2)=8$；

(2) 在点$\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$处，极小值$f\left(\frac{1}{2},\ -1\right)=-\frac{1}{2}e$；

(3) 在点$\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right)$处，极大值$f\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right)=\frac{1}{27}a^3$.

15. 长、宽、高都等于$\frac{2\sqrt{3}}{3}R$（提示：设长方体长、宽、高分别为x、y、z，则拉格朗日函数 $F(x,y)=xyx+\lambda(x^2+y^2+z^2-4R^2)$，由$F'_x=0$，$F'_y=0$，$F'_z=0$，$x^2+y^2+z^2=4R^2$，联立解得$x=y=z=-2\lambda$，$\lambda=\frac{-\sqrt{3}}{3}R$）.

16. $\left(\frac{21}{13},\ 2,\ \frac{63}{26}\right)$.

[提示：$F(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2+\lambda(3x-2z)$]

17. $x=\frac{2}{3}a$，$t=1$.

18. $\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma\geqslant\iint\limits_D(x^2+y^2)^2\mathrm{d}\sigma$.

19. (1) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_0^{y+1}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_1^3\mathrm{d}x\int_x^{3x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_1^3\mathrm{d}y\int_1^{y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_3^9\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{3}}^{3}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{4-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_2^4\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(4) $\int_0^4\mathrm{d}x\int_{3-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{3+\sqrt{4-(x-2)^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_1^5\mathrm{d}y\int_{2-\sqrt{4-(y-3)^2}}^{2+\sqrt{4-(y-3)^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

20. (1) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$； (2) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{3-2y}f(x,y)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

21. (1) 1；(2) $2\frac{1}{4}$；(3) $\frac{76}{3}$；(4) $14a^4$；(5) $1-\sin1\approx0.1585$；(6) $\frac{a^3}{3}$；

(7) $\frac{1}{3}R^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$；(8) $\frac{3}{64}\pi^2$.

22. 2.

23. $\frac{32}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)a^3$.

习　题　五

1. (1) 常系数线性微分方程，二阶；(2) 不是微分方程；(3) 微分方程，一阶；(4) 微分方程，一阶；(5) 常系数线性微分方程，一阶；(6) 常系数线性微分方

程，二阶；

（7）常系数线性微分方程，一阶；（8）微分方程，二阶；（9）微分方程，二阶；

（10）常系数线性齐次微分方程，二阶；（11）微分方程，三阶；

（12）常系数线性齐次微分方程，二阶.

2.（1）通解；（2）特解；（3）通解；（4）通解；（5）通解；（6）特解.

3.（略）.

4.（1）$y=e^{Cx}$；（2）$y^2=2\ln(1+e^x)+C$；（3）$\frac{y}{y+1}=C(x-1)^{-a}$；

（4）$10^x+10^{-y}=C$；（5）$y=\frac{x^2}{3}+\frac{3}{2}x+2+\frac{C}{x}$；（6）$y=x-1+Ce^{-x}$；

（7）$\ln\ln y=\sin x-1$；（8）$\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$；（9）$3y^2+2y^3=3x^2+2x^3+5$；

（10）$\cos 2y=2x-2e^x+2e-\frac{3}{2}$；（11）$y=\sin x$；（12）$x=\frac{1}{24}(t+2)^3-\frac{1}{3}$；

（13）$x(e^y-4)=8$；（14）$y=\frac{1}{x}(e^x+2e)$；（15）$y=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$.

5.（1）$y=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$；（2）$y=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$；

（3）$y=-\ln\cos(x+C_1)+C_2$；（4）$y=C_1\ln x+C_2$；（5）$y=x$.

6.（1）$y=(C_1+C_2x)e^{\frac{5}{2}x}$；（2）$y=e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{5}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{5}}{2}x\right]$；

（3）$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$；（4）$y=(1+3x)e^{-2x}$；

（5）$y=\frac{1}{2}e^{2x}$；（6）$y=e^{4(1-x)}$；

（7）$y=2e^{2x}$；（8）$x=\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$.

习　题　六

1.（1）{（轻,有），（轻,无），（中,有），（中,无），（重,有），（重,无）}；

（2）$A=$ {（重,有），（重,无）}，$B=$ {（轻,无），（中,无），（重,无）}；

（3）$A+\overline{B}=$ {（重,有），（重,无），（轻,有），（中,有），（重,有）}.

2.（1）A，（2）AB，（3）$AB+AC+BC$.

3. 0.9；0.18144；0.003906；0.00000045.

4. 0.516.

5. 0.1055.

6. 0.3241.

7. 0.0833，0.2222.

8. 后选者 Jerry.

9. 有误，总人数 = 1055

10. $P(A)/P(B)$，0，1，$P(\overline{B})/P(\overline{A})$.

11. 略.

12.（1）正确，（2）正确，（3）不正确.

13.（1）正确，（2）正确.

14. 0.902.



15. (1) 0.65, (2) 0.23077, (3) 0.0796.
16. 0.138.
17. 0.94.
18. 3/7.
19. 0.8.
20. 0.5.
21. (1) 红, (2) 黄.
22. 0.312.
23. 0.92.
24. (1) 0.69, (2) Ⅳ.
25. 0.782.
26. (1) 0.6, (2) 0.92.
27. 0.559.
28. (1) 0.785, (2) 0.3721.
29. $\beta = 2\alpha/(1+\alpha) > \alpha$.
30. 0.2200.
31. 0.9222.
32. 0.986.
33. (1) 0.3, (2) 0.1.
34. 0.0016, 0.0256, 0.1536, 0.4096; 4, 0.4096.
35. (1) 0.2304, (2) 0.0384, (3) 0.6544, (4) 0.1393.
36. 0.0333.
37. 0.3935.
38. (1) 0.8641, (2) 0.1359, (3) 0.8910.
39. (1) 1.88, 9.44; (2) 约10只.
40. 81/40, $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.675, & 1\leqslant x<2\\ 0.9, & 2\leqslant x<3\\ 0.975, & 3\leqslant x<4\\ 1, & 4\leqslant x\end{cases}$
41. 2, $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^2, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & 1\leqslant x;\end{cases}$ 0.4.
42. $F(x)=\begin{cases}0, & 0<x;\\ x^2, & 0\leqslant x<1;\\ 2-2x+\dfrac{x^2}{2}, & 1\leqslant x<2;\\ 1, & 2\leqslant x.\end{cases}$, 0.125, 0.245, 0.66.
43. 1/2, $1/\pi$, $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$.
44. 11/25; 17/44.
45. 有关人员往返路程最短.
46. (1) e^{-1}, (2) e^{-2}, (3) e^{-1}.

47. (1) 0.5328，(2) 0.99244，(3) 0.5，(4) 0.9876.
48. (1) 0.2119，(2) 0.74353.
49. (1) 0.1151，(2) 0.2119，(3) 0.673，(4) 1151.
50. (1) 0.3779，(2) 0.4325，(3) 0.8413.
51. 2096 人，10.48 人.
52. 452.9.
53. 2.6，1.44，1.2.
54. −1，0.3，7.
55. 0.3，0.2，0.1.
56. (1) $2/\pi$，(2) 0，0.322476.
57. 2.527658，0.477229，0.804719，1.333589，0.521114，1.310832.
58. 0.601892.
59. 0.923888.
60. (1) 0.040059，(2) 0.081143.
61. (1) 6.513 只，(2) 0.000002194，(3) 4.6138 只.
62. (1) $B(50,0.1)$，$\pi(5)$；(2) 9.9485 枚；(3) 3.9499 枚.
63. (1) 15 小时，(2) 0.8066.

习　题　七

1. (1) 40；(2) 6；(3) 1.
2. (1) $4abcdef$；(2) $4abc$.
3. (1) $a^n+(-1)^{n-1}b^n$；(2) $(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}$.
4. $D_n=\prod(a_i-a_j)$.
5. $\lambda=0$，2，3 时，该方程组有非零解.
6. (1) $a=1$，$b=2$，$c=-2$；(2) $a=-3$ 或 5，$b=\pm 3$，$c=3$.
7. (1) $\begin{bmatrix}-1&3&1&5\\8&2&8&2\\3&7&9&13\end{bmatrix}$；(2) $\begin{bmatrix}3&1&1&-1\\-4&0&-4&0\\-1&-3&-3&-5\end{bmatrix}$；(3) $\begin{bmatrix}10&10&6&6\\0&4&0&4\\2&2&6&6\end{bmatrix}$.
8. (1) $\begin{bmatrix}-5&6&7\\10&2&-6\\-2&17&10\end{bmatrix}$；(2) [29]；(3) $\begin{bmatrix}4&6&8\\6&9&12\\8&12&16\end{bmatrix}$；(4) $\begin{bmatrix}1&0\\5&1\end{bmatrix}$.
9. $\begin{bmatrix}2&-1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$.
10. $(AB)^T=[9\quad 2\quad -1]^T$ 等式成立.
11. (1) $\begin{bmatrix}\cos a&\sin a\\-\sin a&\cos a\end{bmatrix}$；(2) $\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$；(3) $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$；



(4) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

12. 略.

13. (1) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 16 \end{bmatrix}$.

14. (1) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0.25 & -2.25 & 1.5 \\ 0.25 & 0.75 & -0.5 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

15. $R(A)=3$, $R(B)=2$.

16. $\frac{1}{6}[3(2,5,1,3)^{\mathrm{T}}+2(10,1,5,10)^{\mathrm{T}}-5(4,1,-1,1)^{\mathrm{T}}]$.

17. (1) 向量组线性相关.

(2) 向量组线性无关.

18. (1) 无穷多解，$\begin{cases} x_1=\frac{3}{2}x_3-\frac{3}{4}x_4+\frac{5}{4} \\ x_2=\frac{3}{2}x_3+\frac{7}{4}x_4-\frac{1}{4} \\ x_3=x_3 \\ x_4=x_4 \end{cases}$，(2) 无解；

(3) 有唯一解，$x_1=1$，$x_2=1$，$x_3=2$；

(4) 无穷多解，$\begin{cases} x_1=x_1 \\ x_2=-5x_1-4x_4 \\ x_3=11x_1+9x_4+2 \\ x_4=x_4 \end{cases}$.

19. (1) 基础解系为 $\xi_1=(-1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=(-1,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$(不只一个)；

(2) 基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} -\frac{9}{11} \\ \frac{1}{11} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$(不只一个).

20. 通解表示形式不唯一

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

21. (i) $\lambda\neq0$，$\lambda\neq1$ 时有唯一解；(ii) $\lambda=1$ 方程组有无穷多解；(iii) $\lambda=0$ 时方程组无解.

22. （1） $\lambda=1$，特征向量 $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$； $\lambda=2$，特征向量 $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$.

（2） 特征值 $\lambda=4$，特征向量 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

23. $E-A=\begin{bmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\5&2&-3\\-3&1&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，秩为 2，令 $X_3=1$，得基础解系 $X_1=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$，属于 -1 的全部特征向量为 $k\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$，$k$ 是非零的任意常数.

24. 证略.

25. 证略.

附表1　泊松分布 $P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ 的数值表

k	λ							
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0	0.904837	0.818781	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812	0.496585	0.449329
1	0.090484	0.163746	0.222245	0.268128	0.303265	0.329287	0.347610	0.359463
2	0.004524	0.016375	0.033337	0.053626	0.075816	0.098786	0.121663	0.143785
3	0.000151	0.001092	0.003334	0.007150	0.012636	0.019757	0.028388	0.038343
4	0.000004	0.000055	0.000250	0.000715	0.001580	0.002964	0.004968	0.007669
5	—	0.000002	0.000015	0.000057	0.000158	0.000356	0.000696	0.001227
6	—	—	0.000001	0.000004	0.000013	0.000036	0.000081	0.000164
7	—	—	—	—	0.000001	0.000003	0.000008	0.000019
8	—	—	—	—	—	—	0.000001	0.000002

k	λ							
	0.9	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
0	0.406570	0.367879	0.223130	0.135335	0.082085	0.049787	0.030197	0.018316
1	0.365913	0.367879	0.334695	0.270671	0.205212	0.149361	0.150091	0.073263
2	0.164661	0.183940	0.251021	0.270671	0.256516	0.224042	0.184959	0.146525
3	0.049398	0.061313	0.125510	0.180447	0.213763	0.224042	0.215785	0.195367
4	0.011115	0.015328	0.047067	0.090224	0.133602	0.168031	0.188812	0.195367
5	0.002001	0.003066	0.014120	0.036089	0.066801	0.100819	0.132169	0.156293
6	0.000300	0.000511	0.003530	0.012030	0.027834	0.050409	0.077098	0.104196
7	0.000039	0.000073	0.000756	0.003437	0.009941	0.021604	0.038549	0.059540
8	0.000004	0.000009	0.000142	0.000859	0.003106	0.008102	0.016865	0.029770
9	—	0.000001	0.000024	0.000191	0.000863	0.002701	0.006559	0.013231
10	—	—	0.000004	0.000038	0.000216	0.000810	0.002296	0.005292
11	—	—	—	0.000007	0.000049	0.000221	0.000730	0.001925
12	—	—	—	0.000001	0.000010	0.000055	0.000213	0.000642
13	—	—	—	—	0.000002	0.000013	0.000057	0.000197
14	—	—	—	—	—	0.000003	0.000014	0.000056
15	—	—	—	—	—	0.000001	0.000003	0.000015
16	—	—	—	—	—	—	0.000001	0.000004
17	—	—	—	—	—	—	—	0.000001

附表2　正态分布函数 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$ 的数值表

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.500000	0.50	0.691463	1.00	0.841345	1.50	0.933193	2.00	0.977250	2.50	0.993790
0.05	0.519939	0.55	0.708840	1.05	0.853141	1.55	0.939429	2.05	0.979818	2.55	0.994614
0.10	0.539828	0.60	0.725747	1.10	0.864334	1.60	0.945201	2.10	0.982136	2.60	0.995339
0.15	0.559618	0.65	0.742154	1.15	0.874928	1.65	0.950528	2.15	0.984222	2.65	0.995975
0.20	0.579260	0.70	0.758036	1.20	0.884930	1.70	0.955434	2.20	0.986097	2.70	0.996533
0.25	0.598706	0.75	0.773373	1.25	0.894350	1.75	0.959941	2.25	0.987776	2.75	0.997020
0.30	0.617911	0.80	0.788145	1.30	0.903200	1.80	0.964070	2.30	0.989276	2.80	0.997445
0.35	0.636831	0.85	0.802338	1.35	0.911492	1.85	0.967843	2.35	0.990613	2.85	0.997814
0.40	0.655422	0.90	0.815940	1.40	0.919243	1.90	0.971283	2.40	0.991802	2.90	0.988134
0.45	0.673645	0.95	0.828944	1.45	0.926471	1.95	0.974412	2.45	0.992857	2.95	0.988411
										3.00	0.998650